THE ABEL PRIZE 2016

قررت الأكاديمية النرويجية للعلوم والآداب منح السير أندرو ج. ويلز Sir Andrew J. Wiles من جامعة أوكسفورد جائزة أبل لعام ٢٠١٦

"لإثباته الرائع لمبرهنة فيرما Fermat الأخيرة عن طريق الحدسية النمطية عن المنحنيات الإهليلجية شبه الثابتة، وفتح حقبة جديدة في نظرية الأعداد."

تهتم نظرية الأعداد، وهي فرع قديم ورائع من فروع الرياضيات، بدراسة الخصائص الرياضية للأعداد الصحيحة. ويرتبط الموضوع في شكله الحديث بشكل أساسي بالتحليل المركّب والهندسة الجبرية ونظرية التمثيل. وتقوم نتائج نظرية الأعداد بدور هام في حياتنا اليومية من خلال لوغاريتمات التجفير للاتصالات والمعاملات المالية والأمن الرقمي.

كانت مبرهنة فيرما Fermat الأخيرة، التي كان بيير دي فيرما Pierre de Fermat أول من وضعها في القرن السابع عشر، بمثابة التأكيد على أن المعادلة $x^n + y^n = z^n$ ليس لها حلول في الأعداد الصحيحة الموجبة لـ $n > 2$. وقد أثبت فيرما Fermat ادعاءه في حالة $n = 4$، ووجد ليونارد يولر Leonhard Euler دليلاً في حالة $n = 3$، وأثبتت صوفي جيرمان Sophie Germain النتيجة العامة الأولى التي تُطبق على كثير من الأسس الأولية اللانهائية. وكشفت دراسة إرنست كومر Ernst Kummer للمسألة عدة مفاهيم أساسية في نظرية الأعداد الجبرية، مثل الأعداد المثالية والدقة في عملية التحليل الفريد إلى عوامل. ويعتمد البرهان الكامل الذي توصل إليه أندرو ويلز Andrew Wiles على ثلاثة مفاهيم أخرى في نظرية الأعداد، أي المنحنيات الإهليلجية والأشكال النمطية، والتمثيل الجالويسي.

تُعرّف المنحنيات الإهليلجية بواسطة المعادلات التكعيبية في متغيّرين، هما المجالان الطبيعيان لتعريف الدوالّ الإهليلجية التي وضعها نيلز هنريك آبل Niels Henrik Abel. والأشكال النمطية هي دوالّ تحليلية شديدة التماثل معرّفة على النصف العلوي من المستوي المعقّد، وتتحلل بشكل طبيعي إلى عوامل من خلال أشكال تعرف بالمنحنيات الإهليلجية. ويكون المنحنى الإهليلجي نمطياً إذا كان من الممكن وضع معايير له بتطبيق من أحد هذه المنحنيات النمطية. وتدّعي الحدسية النمطية التي اقترحها غورو

شيمورا Goro Shimura ويوتاكا تانياما Yutaka Taniyama وأندريه ويل André Weil في الخمسينيات والستينيات من القرن الماضي أن كل منحنى إهليلجي معرّف على أعداد منطقية هو منحنى نمطي.

في عام ١٩٨٤، ربط غيرهارد فراي Gerhard Frey المنحنى الإهليلجي شبه الثابت بأي مثال معاكس افتراضي لمبرهنة فيرما Fermat الأخيرة، وساوره قدر كبير من الشك في إمكانية عدم كون المنحنى الإهليجي نمطياً. وقد برهن كينيث ريبت Kenneth Ribet عدم نمطية فراي عن طريق حدسية إبسيلون لجان- بيير سير في عام ١٩٨٦. وبالتالي، فإن البرهان على حدسية شيمورا- تانياما – ويل Shimura-Taniyama-Weil النمطية للمنحنيات الإهليلجية شبه الثابتة يمكن أن تسفر عن إثبات مبرهنة فيرما Fermat الأخيرة. ومع ذلك، ففي الوقت الذي كان يتوفر فيه اعتقاد واسع النطاق بأن الحدسية النمطية صعبة المنال تماماً، حدث تقدم مذهل عندما أدخل أندرو ويلز Andrew Wiles، في الورقة التي نُشرت في عام ١٩٩٥ وحققت اختراقا، أسلوبه في رفع النمطية وأثبت حالة الحدسية النمطية شبه الثابتة.

تتعلق تقنية رفع النمطية الخاص بويلز Wiles بالتماثلات الجالويسة للنقاط من مرتبة محددة في بنية زمرة آبلية على منحنى إهليلجي. وبناء على نظرية التشوه لباري مازور Barry Mazur للتميثلات الجالويسية هذه، حدد ويلز Wiles معياراً رقمياً يكفل إمكانية رفع نمطية نقاط من نوع p لنمطية نقاط من نوع قوة p، حيث تكون p عددا أوليا مفردا. بذلك تصبح النمطية المرفوعة كافية لإثبات أن المنحنى الإهليلجي نمطي. وتم التأكيد على هذا المعيار الرقمي في الحالة شبه الثابتة باستعمال ورقة مصاحبة وضعت بالاشتراك مع ريتشارد تايلور Richard Taylor. تشير مبرهنات روبرت لانغلاندز Robert Langlands وجيرولد تانيل Jerrold Tunnell إلى أن التمثيل الجالويسي الذي توفره نقاط من النوع الثالث يكون في كثير من الحالات نمطياً. وبتبديل بارع من عدد أولي إلى آخر، أثبت ويلز Wiles أنه في الحالات المتبقية يكون التمثيل الجالويسي المتواجد في نقاط من المرتبة الخامسة نمطياً. وقد أسهم ذلك في استكمال برهانه للحدسية النمطية، وبالتالي أيضا لمبرهنة فيرما Fermat الأخيرة.

كانت الأفكار الجديدة التي قدمها ويلز حاسمة بالنسبة للتطورات اللاحقة، بما في ذلك البرهان في عام ٢٠٠١ على الحالة العامة للحدسية الإهليلجية من قبل كريستوف برويل Christophe Breuil وبريان كونراد Brian Conrad وفريد دايموند Fred Diamond وريتشارد تايلور Richard Taylor . ومؤخراً، في عام ٢٠١٥، أثبت نونو فريتاس Nuno Freitas وباو لو هونغ Bao V. Le Hung وسمير سكسك Samir Siksek النمطية المماثلة لميادين الأعداد الرباعية الحقيقية. وقلما كانت النتائج عبر تاريخ الرياضيات بمثل هذا الثراء الذي أحدثه البرهان الرائع لمبرهنة فيرما الأخيرة.

正則性の問題は、時には厳密な証明のために、また時には解についての貴重な定性的洞察をもたらすゆえに、偏微分方程式の研究において日常的な懸案である。ナッシュがデ・ジョルジと時を同じくして、係数に関する正則性の仮定なしに一般次元での線形楕円型方程式の解に関する最初のヘルダー評価を証明したのは、この分野において画期的なことであった。何にも増して、これは解析的楕円型積分汎関数の最小化関数の解析性についてのヒルベルトの第十九問題に対する解答へとつながったのである。ナッシュの証明の数年後、ニーレンバーグはアグモン及びダグリスとともに、L^pデータを持つ線形楕円型方程式の解の幾つかの革新的な正則性の評価を確立した。これは古典的なシャウダーの理論を拡張し、このようなデータの可積分条件がある状況への応用に極めて有用である。これらの業績は現代の正則性理論の基礎となり、以来、この理論は、非常に粗くなめらかでない状況においても解析、幾何学及び確率に応用されて、目覚しい発展を遂げてきた。

対称性も非線形微分方程式の解に関して、その定性研究と数値計算の簡略化の両方に、不可欠な情報を提供している。この分野における最も素晴らしい成果の一つは、ニーレンバーグがガイダス及びニーと協力して成し遂げた。彼らは広範なクラスの非線形楕円型方程式のそれぞれの正の解が方程式自体に存在するのと同じ対称性を提示することを示したのである。

ナッシュとニーレンバーグによって証明された成果は、意図された問題の解答の域をはるかに超えて、非常に有用なツールとなり、更なるコンテクストにおいて幅広く応用されてきた。これらのツールの中で最もよく知られているのは、ガリアード＝ニーレンバーグの不等式とジョン＝ニーレンバーグの不等式を含む、ニーレンバーグによる補間不等式である。ジョン＝ニーレンバーグの不等式は、有界平均振動関数がどれだけその平均値から逸脱し得るかを統括

し、ハーディー空間 H^1 と BMO 空間の予想外の双対性を表現する。ナッシュ＝デ・ジョルジ＝モーザーの正則性理論と（最初にシュタインによって証明された）ナッシュ不等式は、ユークリッド空間から滑らかな多様体及び距離空間に至る、あらゆる設定における確率的半群の研究の鍵となるツールになった。ナッシュ＝モーザーの逆写像定理は、あらゆる種類の摂動非線形偏微分方程式を解くための強力な方法である。ナッシュとニーレンバーグの非線形偏微分方程式に関する現代のツールボックスへの広範囲に及ぶ影響をここで言い尽くすことは不可能だが、コーン＝ニーレンバーグの擬微分作用素の理論にも言及しなければならない。

ナッシュとニーレンバーグは、個々に最高峰の数学者であることに加えて、その貢献と交流を通じてお互いに影響し合ってきた。彼らが１９５０年代にクーラント数学研究所で始めた実り多い対話の成果は、今日、これまでにないほど強く感じられる。