II.

Oplösning af nogle Opgaver ved Hjelp af bestemte Integraler.

Af

Student N. H. Abel.

(Fortsat fra 3die Hefte, Side 68.)

III.

De bernoulliske Tal udtrykte ved bestemte Integraler, og det deraf udledede Udtryk for det endelige Integral $\Sigma\varphi x$.

Naar man udvikler $1-\frac{u}{2}\cdot\cot\frac{u}{2}$ i en Række ordnet efter de hele Potenser af u og sætter denne Række lig

$$1-\frac{u}{2}\cdot\cot\frac{u}{2}=A_1\frac{u^2}{2}+A_2\cdot\frac{u^4}{2.3.4}+\ldots+A_n\cdot\frac{u^{2n}}{2.3\ldots 2n}+\ldots$$

saa er som bekjendt A_1, A_2, A_3, &c. de bernoulliske Tal. *)

*) Man see Euleri Institutiones calculi diff. Pag. 426.

Nu er:

$$1-\frac{u}{2}.\cot\frac{u}{2}=2u^2\left(\frac{1}{4\pi^2-u^2}+\frac{1}{4.4\pi^2-u^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4.9\pi^2-u^2}+\frac{1}{4.16\pi^2-u^2}+\ldots\right)^{*)}$$

og naar den anden Side udvikles i en Række

$$1-\frac{u}{2}.\cot\frac{u}{2}=\frac{u^2}{2\pi^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)$$
$$+\frac{u^4}{2^3.\pi^4}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots\right)$$
$$+\frac{u^6}{2^5.\pi^6}\left(1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\ldots\right)$$
$$+\ldots\ldots$$
$$+\frac{u^{2n}}{2^{2n-1}.\pi^{2n}}\left(1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\ldots\right)$$
$$+\ldots$$

Sammenlignes denne Udvikling med den forrige, saa faaer man

$$\frac{A_n}{2.3\ldots 2n}=\frac{1}{2^{2n-1}.\pi^{2n}}\left(1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\ldots\right)$$

Lad os nu betragte Integralet $\int\frac{t^{2n-1}.dt}{e^t-1}\ (t=0,\ t=\frac{1}{0})$.

Man har $\frac{1}{e^t-1}=e^{-t}+e^{-2t}+e^{-3t}+\ldots\ldots$

altsaa

---

*) Euleri Inst. calc. diff. Pag. 423.

$$\int \frac{t^{2n-1}.dt}{e^{t}-1} = \int e^{-t}.t^{2n-1}.dt + \int e^{-2t} t^{2n-1}.dt + \ldots$$

$$+ \int e^{-kt}.t^{2n-1}.dt + \ldots .$$

Nu er $\int e^{-kt}.t^{2n-1}.dt \; (t=0, t=\tfrac{1}{0}) = \Gamma(2n).\frac{1}{k^{2n}}$ *)

altsaa

$$\int \frac{t^{2n-1}.dt}{e^{t}-1} = \Gamma(2n)\left(1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\ldots\right)$$

men efter det Foregaaende har man

$$1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\ldots=\frac{2^{2n-1}.\pi^{2n}}{2.3\ldots 2n}.A_n=\frac{2^{2n-1}.\pi^{2n}}{\Gamma\;(2n+1)}.A_n$$

altsaa

$$\int \frac{t^{2n-1}.dt}{e^{t}-1} = \frac{\Gamma\;(2n)}{\Gamma(2n+1)}.2^{2n-1}.\pi^{2n}.A_n = \frac{2^{2n-1}.\pi^{2n}}{2n}.A_n$$

fölgelig:

$$A_n = \frac{2n}{2^{2n-1}.\pi^{2n}}.\int \frac{t^{2n-1}.dt}{e^{t}-1} \quad (t=0,\; t=\tfrac{1}{0})$$

Sættes istedetfor t, $t\pi$ saa faaer man endelig:

---

*) Dette Udtryk udledes let af Fundamentalligningen $\Gamma\,(a) = \int dx.\left(\log\frac{1}{x}\right)^{a-1}$ ved at gjöre $a=2n$ og $x=e^{-kt}$. Legendre Exercices de calcul int. T. I. Pag. 277.

$$A_n = \frac{2n}{2^{2n-1}} \cdot \int \frac{t^{2n-1}.dt}{e^{\pi t} - 1} \; (t=0,\; t=\tfrac{1}{0})$$

De bernoulliske Tal lade sig altsaa saaledes paa en simpel Maade udtrykke ved bestemte Integraler.

Omvendt seer man ogsaa at $\int \frac{t^{2n-1}.dt}{e^{\pi t} - 1} \; (t=0,\; t=\tfrac{1}{0})$

altid er rational naar u er et heelt Tal og lig $\frac{2^{2n-1}}{2n}.A_n$, hvilket er mærkværdigt nok.

Saaledes faaer man f. Ex. ved at sætte $n=1.2.3.$

$$\int \frac{t.dt}{e^{\pi t} - 1} \left((t=0,\; t=\frac{1}{0}\right) = \frac{1}{6}$$

$$\int \frac{t^3.dt}{e^{\pi t} - 1} \left(t=0,\; t=\frac{1}{0}\right) = \frac{1}{30} \cdot \frac{2^3}{6} = \frac{2}{45}$$

$$\int \frac{t^5\, dt}{e^{\pi t} - 1} \left(t=0,\; t=\frac{1}{0}\right) = \frac{1}{42} \cdot \frac{2^5}{8} = \frac{2}{21} \;\&c.$$

Ved Hjelp af det Foregaaende kan man nu meget let udtrykke $\Sigma\phi x$ ved et bestemt Integral.

Man har:

$$\Sigma\phi x = \int \phi x\,.\,dx - \tfrac{1}{2}\phi x + A_1 \cdot \frac{\phi' x}{1.2} - A_2 \cdot \frac{\phi''' x}{1.\,2.\,3.\,4}$$
$$+ A_3 \cdot \frac{\phi^{V} x}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6} - \ldots\ldots$$

Indsættes Værdierne for A_1, A_2, A_3, &c.

saa faaer man:

$$\Sigma\varphi x = \int \varphi x . dx - \tfrac{1}{2}\varphi x + \frac{\varphi' x}{1.\ 2} \int \frac{t . dt}{e^{\pi t} - 1} - \frac{\varphi''' x}{1.\ 2.\ 3.\ 2^3} .$$

$$\int \frac{t^3 dt}{e^{\pi t} - 1} + \frac{\varphi^{V} x}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 2^5} . \int \frac{t^5 dt}{e^{\pi t} - 1} - \dots$$

det er:

$$\Sigma\varphi x = \int \varphi x . dx - \tfrac{1}{2}\varphi x +$$

$$\int \frac{dt}{e^{\pi t} - 1} \left(\varphi' x . \frac{t}{2} - \frac{\varphi''' x}{1.2.3} . \frac{t^3}{2^3} + \frac{\varphi^{V} x}{1.2.3.4.5} . \frac{t^5}{2} - \dots \right)$$

Nu er $\varphi\left(x + \frac{t}{2}\sqrt{-1}\right) = \varphi x - \frac{t^2}{1.\ 2.\ 2^2} . \varphi'' x + \dots$

$$+ \sqrt{-1} . \left(\varphi x . \frac{t}{2} - \frac{\varphi''' x}{1.\ 2.\ 3} . \frac{t^3}{2^3} + \frac{\varphi^{V} x}{1.2.3.4.5} . \frac{t^5}{2^5} - \dots \right)$$

altsaa:

$$\varphi' x . \frac{t}{2} - \frac{\varphi''' x}{1.\ 2.\ 3} . \frac{t^3}{2^3} + \frac{\varphi^{V} x}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} . \frac{t^5}{2^5} - \dots$$

$$= \frac{1}{2 . \sqrt{-1}} \left[\varphi\left(x + \frac{t}{2}\sqrt{-1}\right) - \varphi\left(x - \frac{t}{2}\sqrt{-1}\right) \right]$$

Indsættes denne Værdie i Udtrykket for $\Sigma\varphi x$ saa faaer man:

$$\Sigma\varphi x = \int \varphi x . dx - \tfrac{1}{2}\varphi x +$$

$$\int \frac{dt}{e^{\pi t} - 1} . \frac{\varphi\left(x + \frac{t}{2}\sqrt{-1}\right) - \varphi\left(x - \frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)}{2 . \sqrt{-1}} \quad (t = 0, t = \tfrac{1}{0})$$

Dette synes mig at være et meget mærkværdigt Udtryk for det endelige Integral af en hvilkensomhelst Funktion, og saavidt mig er bekjendt er det ikke anfört af nogen.

Af den foregaaende Ligning finder man

$$\int \frac{dt}{e^{\pi t}-1}\cdot\frac{\varphi\left(x+\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)-\varphi\left(x-\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)}{2.\sqrt{-1}}$$

$$=\varphi x-\int \varphi x.dx+\tfrac{1}{2}\varphi x \quad \left(t=0,\ t=\tfrac{1}{0}\right)$$

og saaledes har man altsaa et Udtryk for et meget almindeligt intégrale definie.

Jeg vil vise Anvendelsen paa et Par specielle Tilfælde:

1) Lad φx være $=e^{x}$

I dette Tilfælde har man:

$$\varphi\left(x+\tfrac{t}{2}\sqrt{-1}\right)=e^{x}.e^{\frac{t}{2}\sqrt{-1}}=e^{x}\cos\tfrac{t}{2}$$
$$+\sqrt{-1}.e^{x}.\sin\tfrac{t}{2}$$

altsaa:

$$\frac{\varphi\left(x+\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)-\varphi\left(x-\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)}{2.\sqrt{-1}}=e^{x}.\sin.\tfrac{t}{2}$$

fölgelig:

$$\int\frac{dt.\sin\frac{t}{2}}{e^{\pi t}-1}=e^{-x}.\Sigma e^{x}-e^{-x}\int e^{x}.dx+\tfrac{1}{2}$$

$$\text{men}\int e^{x}dx=e^{x}\ \text{og}\ \Sigma e^{x}=\frac{e^{x}}{e-1}$$

altsaa

$$\int \frac{dt.\sin.\frac{t}{2}}{e^{\pi t}-1} = \frac{1}{e-1} - \frac{1}{2} \; (t=0,\; t=\tfrac{1}{0})$$

Sættes $\varphi x = e^{mx}$ saa faaer man paa samme Maade

$$\int \frac{dt.\sin\frac{mt}{2}}{e^{\pi t}-1} = \frac{1}{e^{m}-1} - \frac{1}{m} + \frac{1}{2} \; (t=0,\; t=\tfrac{1}{0})$$

Sættes $2t$ istedet for t saa faaer man:

$$\int \frac{dt.\sin mt}{e^{2\pi t}-1} \; (t=0,\; t=\tfrac{1}{0}) = \tfrac{1}{4}\frac{e^{m}+1}{e^{m}-1} - \frac{1}{2m}$$

som *Legendre* paa en anden Maade har fundet. (*exercices decal. int. T II Pag* 189).

2) lad φx være $= \frac{1}{x}$
saa faaer man

$$\frac{\varphi\left(x+\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right) - \varphi\left(x-\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)}{2\sqrt{-1}} = -\frac{t}{2.\left(x^2+\frac{t^2}{4}\right)}$$

og $\int \varphi x.\,dx = \int \frac{dx}{x} = \log x + C$

altsaa:

$$\int \frac{t.dt}{\left(x^2+\frac{t^2}{u}\right)\left(e^{\pi t}-1\right)} = 2\log x - \frac{1}{x} - 2\Sigma\left(\frac{1}{x}\right) + C$$

C kan bestemmes ved at sætte $x=1$ og da faaer man:

$$C = -3 - \int \frac{t.dt}{\left(1+\frac{t^2}{u}\right)\left(e^{\pi t}-1\right)}$$

3) Antages $\varphi x = \sin(ax)$ saa har man:

$$\sin\left(ax+\frac{at}{2}\sqrt{-1}\right) - \sin\left(ax-\frac{at}{2}\sqrt{-1}\right)$$

$$= 2\cos ax \sin \frac{at}{2} \sqrt{-1}$$

$$= \cos ax. \frac{\left(e^{-\frac{at}{2}} - e^{\frac{at}{2}}\right)}{\sqrt{-1}}$$

$$\Sigma \sin ax = - \frac{\cos (ax - \frac{1}{2} a)}{2 \sin \frac{1}{2} a} \int \sin ax . dx = \frac{1}{a} \cos ax$$

altsaa:

$$\frac{\cos ax}{2} \int \frac{e^{\frac{at}{2}} - e^{\frac{-at}{2}}}{e^{\pi t} - 1} . dt = \tfrac{1}{2} \sin ax - \frac{\cos (ax - \frac{1}{2} a)}{2 \sin \frac{1}{2} a}$$

$$- \frac{1}{a} \cos ax$$

det er, naar istedet for a sættes $2a$

$$\int \frac{e^{-at} - e^{at}}{e^{\pi t} - 1} dt. \ (t = o,\ t = \tfrac{2}{o}) = \cot a - \frac{1}{a}$$

Ved at antage andre Former for φx kan man paa samme Maade finde Værdien af andre bestemte Integraler.

IV.

Summation af den uendelige Række
$\varphi (x+1) - \varphi (x+2) + \varphi (x+3) - \varphi (x+4) + \&c = S$
ved Hjelp af bestemte Integraler.

Man seer let at S maa kunne udtrykkes saaledes:
$S = \frac{1}{2} \varphi x + A_1 \varphi' x + A_2 \varphi'' x + A_3 \varphi''' x + \ldots\ldots$

Antages $\varphi x = e^{ax}$ saa har man

$$S = \tfrac{1}{2} e^{ax} + e^{ax} (A_1 a + A_2 . a^2 + A_3 . a^3 + \ldots$$

Men man har ogsaa:

$$S = e^{ax+a} - e^{ax+2a} + e^{ax+3a} - \ldots = \frac{e^{ax}\, c^{a}}{1+e^{a}}$$

altsaa

$$\frac{e^{a}}{1+e^{a}} - \tfrac{1}{2} = A_1 a + A_2 . a^2 + A_3 . a^3 + \ldots$$

Sættes $a = c\sqrt{-1}$ saa faaer man:

$$\frac{e^{c\sqrt{-1}}}{1+e^{c\sqrt{-1}}} - \tfrac{1}{2} = \sqrt{-1} . (cA_1 - c^3 . A_3 + c^5 . A_5 - \ldots) + P$$

hvor P betegner Summen af alle de reelle Led

$$\text{nu er: } \frac{e^{c\sqrt{-1}}}{1+e^{c\sqrt{-1}}} - \tfrac{1}{2} = +\tfrac{1}{2} . \frac{e^{\frac{c}{2}\sqrt{-1}} - e^{-\frac{c}{2}\sqrt{-1}}}{e^{\frac{c}{2}\sqrt{-1}} + e^{-\frac{c}{2}\sqrt{-1}}}$$

$$= + \tfrac{1}{2}\sqrt{-1} . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c$$

altsaa:

$$\tfrac{1}{2} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c = + A_1 . c - A_3 . c^3 + A_5 . c^5 - \ldots\ldots$$

Nu er: (*Legendre* Ex. de cal. int. T. II p 186)

$$\tfrac{1}{2} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c = \int \frac{e^{ct} - e^{-ct}}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} . dt . (t=0, t=\tfrac{1}{0})$$

Nu er $e^{ct} - e^{-ct} = 2\left[ct + \frac{c^3}{2.3.}.t^3 + \frac{c^5}{2.3.4.5.}.t^5 + \ldots\right]$

altsaa:

$\frac{1}{2}\,tang\,\frac{1}{2}\,c = A_1.c - A_3.c^3 + A_5.c^5 - \ldots$

$$= 2c\int\frac{tdt}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} + 2.\frac{c^3}{2.3.}.\int\frac{t^3dt}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} + 2.\frac{c^5}{2.3.4.5.}.$$

$$\int\frac{t^5dt}{e^{\pi t.4.\pi t}} + \ldots.$$

fölgelig:

$$A_1 = 2\int\frac{tdt}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}$$

$$A_2 = -\frac{2}{2.3.}\int\frac{t^3.dt}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}$$

$$A_3 = \frac{2}{2.3.4.5.}.\int\frac{t^5.dt}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}$$

&c.

Indsættes disse Værdier i Udtrykket for S, saa faaer man:

$$S = \frac{1}{2}\,\varphi x + 2\int\frac{dt}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}\left[t'\varphi x - \frac{t^3}{2.3.}.\varphi'''x\right.$$

$$\left. + \frac{t^5}{2.3.4.5.}.\varphi^{v}x - \ldots\right]$$

men $t\varphi' x - \frac{t^3}{2.3.}.\varphi''' x - \ldots = \frac{\varphi(x + t\sqrt{-1}) - \varphi(x - t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$

altsaa:

$$\varphi(x+1)-\varphi(x+2)+\varphi(x+3)-\varphi(x+4)+\ldots$$

$$=\tfrac{1}{2}\varphi x+2.\int\frac{dt}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}\cdot\frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})-\varphi(x-t\sqrt{-1})}{2.\sqrt{-1}}$$

$$(t=0,\ t=\tfrac{1}{0})$$

Sættes $x=0$ saa har man:

$$\varphi\,(1)-(2)+\varphi\,(3)-\varphi\,(4)+\ldots \text{ in inf.}$$

$$=\tfrac{1}{2}\varphi(0)+2\int\frac{dt}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}\cdot\frac{\varphi\,(t\sqrt{-1})-\varphi(-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$

$$(t=0,\ t=\tfrac{1}{0})$$

Lad os f. Ex. antage $\varphi x=\frac{1}{x+1}$ saa er $\frac{\varphi(t\sqrt{-1})-\varphi(-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$

$$=-\frac{1}{1+t^2}$$

altsaa:

$$\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}+\ldots=\tfrac{1}{2}-2\int\frac{tdt}{(1+t^2)\left(e^{\pi t}-e^{-\pi t}\right)}$$

men man har:

$$\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}-\ldots=1-\log 2$$

altsaa:

$$\int\frac{tdt}{(1+t^2)\left(e^{\pi t}-e^{-\pi t}\right)}=\tfrac{1}{2}\log 2-\tfrac{1}{4}\ (t=0,\ t=\tfrac{1}{0})$$
