

Note sur quelques formules elliptiques
(par M. N. H. Abel)

Dans le tome second de ce journal j'ai donné plusieurs expressions for-
mules à l'égard des développements des fonctions φx , $\varphi' x$, $\varphi'' x$
dans le cas où les modules c et c' sont réels. Il sera facile
d'en déduire de formules analogues pour le cas où c est une
quantité négative, comme nous allons voir.

Soit pour plus de simplicité $c = 1$. Cela posé si l'on
fait

$$(1) \dots \lambda x = f\left(\frac{\omega}{2} - b.x\right) \quad \text{où } b = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$$

on trouvera aisément par la définition de la fonction f qu'on
aura :

$$2 \dots x = \int_0^{\frac{\omega}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

en faisant $x = \lambda \alpha$ et $c = \frac{e}{\sqrt{1+e^2}}$ le module
 c est donc plus petit que l'unité et comme on a $\frac{\omega}{2}$
 $b = \sqrt{1-c^2}$; b sera son complément. On trouvera de
même :

$$3 \dots \begin{cases} \frac{\omega}{2} = b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} = b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 \theta}} \\ \frac{\omega'}{2} = b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-b^2x^2)}} = b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-b^2 \sin^2 \theta}} \end{cases}$$

Si l'on fait

$$4 \dots \lambda \alpha = \sqrt{1-\lambda^2} x \quad ; \quad \lambda' \alpha = \sqrt{1-c^2} \lambda \alpha$$

On aura encore :

$$5 \dots \lambda \alpha = \varphi\left(\frac{\omega}{2} - b.x\right) \quad ; \quad \lambda' \alpha = b \cdot \varphi'\left(\frac{\omega}{2} - b.x\right)$$

et en faisant

$$6 \dots \frac{\omega'}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 \theta}} \quad ; \quad \frac{\omega}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-b^2 \sin^2 \theta}}$$

on a en vertu de (3)

$$7 \dots \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\omega}{\omega'} \quad ; \quad \omega = b.\omega' \quad , \quad \omega' = b.\omega$$

Considérons maintenant d'abord la formule (185) pag 176,
qui donne la valeur de φx . Pour en déduire celle de
la fonction λx il suffit de mettre $\frac{\omega}{2} - b.x$ à la place
de x . Faisons donc $x = \frac{\omega}{2} - b.0$ et pour abréger

$$8 \dots s = e^{-\frac{\theta \pi}{\omega'}} \quad , \quad r = e^{-\frac{\omega'}{\omega} \pi}$$

Alors la formule (185) donne sur le champ :

$$\lambda \theta = A \cdot \prod_{m=0}^{\infty} \frac{(1-r^{2m+1})^2 - (sr^m - s^{-1}r^{m+1})^2}{(1+r^{2m+1})^2 + (sr^m - s^{-1}r^{m+1})^2}$$

$$9 \dots A^{\frac{1}{2}} = \frac{(1+r)(1+r^3) \dots}{(1-r)(1-r^3) \dots}$$

$$10 \dots (1-r^{2m+1})^2 - (sr^m - s^{-1}r^{m+1})^2 = (1-s^2r^{2m})(1-s^{-2}r^{2m+2})$$

$$11 \dots (1+r^{2m+1})^2 + (sr^m - s^{-1}r^{m+1})^2 = (1+s^2r^{2m})(1+s^{-2}r^{2m+2})$$

par conséquent l'expression de $\lambda \theta$ deviendra en développant :

14

$$9 \dots \lambda \theta = A \cdot \frac{1-s^2}{1+s^2} \cdot \frac{1-s^2r^2}{1+s^2r^2} \cdot \frac{1-s^2r^4}{1+s^2r^4} \cdot \frac{1-s^2r^6}{1+s^2r^6} \cdot \frac{1-s^2r^8}{1+s^2r^8} \dots$$

Avec la même facilité on tirera des deux formules (184) et (186)
en y faisant $x = \frac{\omega}{2} - b.0$

$$10 \dots \lambda \theta = A' \cdot \frac{2s}{1+s^2} \cdot \frac{(1-s^2r)(1-s^{-2}r)(1-s^2r^3)(1-s^{-2}r^3) \dots}{(1+s^2r^2)(1+s^{-2}r^2)(1+s^2r^4)(1+s^{-2}r^4) \dots}$$

$$11 \dots \lambda' \theta = A'' \cdot \frac{2s}{1+s^2} \cdot \frac{(1+s^2r)(1+s^{-2}r)(1+s^2r^3)(1+s^{-2}r^3) \dots}{(1+s^2r^2)(1+s^{-2}r^2)(1+s^2r^4)(1+s^{-2}r^4) \dots}$$

où A' , A'' sont données par les formules :

$$12 \dots \sqrt{A'} = \frac{(1+r^2)(1+r^4)(1+r^6) \dots}{(1-r)(1-r^3)(1-r^5) \dots}$$

$$13 \dots \sqrt{A''} = \frac{(1+r^2)(1+r^4)(1+r^6) \dots}{(1+r)(1+r^3)(1+r^5) \dots}$$

On pourra trouver pour A , A' , A'' d'autres expressions
beaucoup plus simples et par lesquelles on aura des formules
très-remarquables. Ainsi si l'on fait dans la formule (9)

$$\theta = \frac{\omega'}{2} + \frac{\omega'}{2}i \quad \text{on aura} \quad \lambda \theta = f\left(\frac{\omega}{2}i\right) = \frac{\sqrt{1+c^2}}{c} = \frac{1}{c}$$

$$14 \dots s^2 = e^{-\pi i + \frac{\omega'}{\omega} \pi} = -r \quad \text{donc en substituant}$$

$$\frac{1}{c} = A \cdot \left(\frac{1+r}{1-r} \cdot \frac{1+r^3}{1-r^3} \cdot \frac{1+r^5}{1-r^5} \dots \right)^2$$

c'est-à-dire en vertu de la formule (7) $\frac{1}{c} = A'$ d'où

$A = \frac{1}{A'}$. En faisant de même dans l'expression de

$$\lambda \theta \quad ; \quad \theta = \frac{\omega'}{2} + \frac{\omega'}{2}i \quad \text{on a} \quad \lambda \theta = \varphi\left(\frac{\omega}{2}i\right) = \frac{i}{c} = i \frac{\sqrt{1-c^2}}{c}$$

et $s^2 = -r$ donc :

$$15 \dots \frac{i}{c} = 4A'i \sqrt{r} \cdot \left(\frac{1+r^2}{1-r} \cdot \frac{1+r^4}{1-r^3} \dots \right)^2$$

$$16 \dots \text{d'où l'on tire en vertu de (12)} \dots A' = \frac{1}{2\sqrt{r}} \cdot \sqrt{\frac{b}{c}}$$

Enfin si l'on fait dans la formule (11) $\theta = \frac{\omega'}{2}$ on trouvera

$$\lambda' \theta = \sqrt{1-c^2} = b \quad , \quad s^2 = r \quad \text{donc} :$$

$$17 \dots b = 4A'' \sqrt{r} \cdot \left(\frac{1+r^2}{1-r} \cdot \frac{1+r^4}{1-r^3} \dots \right)^2 = 4A'' \sqrt{r} \cdot \frac{A'}{A}$$

$$18 \dots \text{et par suite} \quad A'' = \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{r}}$$

En comparant ces valeurs de A , A' , A'' avec celles données
plus haut on en déduira ces formules :

$$14 \dots \sqrt{c} = \frac{1+r}{1-r} \cdot \frac{1+r^3}{1-r^3} \cdot \frac{1+r^5}{1-r^5} \dots$$

$$15 \dots \sqrt{\frac{b}{c}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{r} \cdot \frac{1+r^2}{1-r} \cdot \frac{1+r^4}{1-r^3} \cdot \frac{1+r^6}{1-r^5} \dots$$

$$16 \dots \sqrt{b} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{r} \cdot \frac{1+r^2}{1-r} \cdot \frac{1+r^4}{1-r^3} \cdot \frac{1+r^6}{1-r^5} \dots$$

dont l'une est une suite des deux autres.

Si l'on fait dans l'expression de $\lambda \theta$ $\theta = 0$ après avoir
divisé les deux membres par $1-s^2 = 2 \frac{\theta \pi}{\omega'}$ et qu'on

3) Remarque que $\frac{\lambda\theta}{\theta} = 1$ pour $\theta = 0$ on obtiendra

$$4\sqrt{c} \cdot \sqrt{\frac{\omega'}{\pi}} = \frac{(1-r^2)(1-r^4)(1-r^6)\dots}{(1+r^2)(1+r^4)(1+r^6)\dots} \dots 17$$

de là on tire en substituant la valeur de $4\sqrt{c}$

$$18 \dots \sqrt{\frac{\omega'}{\pi}} = \frac{(1+r)(1-r^2)(1+r^3)(1-r^4)\dots}{(1-r)(1+r^2)(1-r^3)(1+r^4)\dots}$$

$$= (1+r)^2(1+r^3)^2(1+r^5)^2\dots \times (1-r^2)(1-r^4)(1-r^6)\dots$$

$$= \{ (1+r)(1+r^3)\dots(1+r^5)\dots \}^2 \cdot \{ (1-r)(1-r^2)(1-r^4)\dots \}$$

Il est facile à l'aide des formules (16, 14, 18) de trouver les

produits des séries produits infinis

$$(1+r)(1+r^2)(1+r^3)\dots \quad (1-r)(1-r^2)(1-r^3)\dots$$

en effet si l'on fait pour abréger:

$$19 \dots \begin{cases} P = (1+r)(1+r^3)(1+r^5)\dots \\ P' = (1+r^2)(1+r^4)(1+r^6)\dots \end{cases}$$

et qu'on remarque la formule

$$\frac{1}{(1-r)(1-r^3)(1-r^5)\dots} = (1+r)(1+r^2)(1+r^3)\dots = P^2 P'$$

les formules (14, 16) donneront sur le champ:

$$4\sqrt{c} = \frac{1}{P^2 P'} \quad ; \quad 4\sqrt{b} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{r} \cdot \frac{P'}{P}$$

d'où l'on tire

$$20 \dots P = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{b^2 c^2}} \quad ; \quad P' = \frac{\sqrt{b} \cdot \sqrt{r}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{c}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}}$$

On connaît donc les produits P et P' . En les multipliant entre eux il viendra

$$21 \dots (1+r)(1+r^2)(1+r^3)(1+r^4)\dots = \frac{\sqrt{2} \sqrt{b}}{\sqrt{r} \sqrt{c}} \cdot \sqrt{r}$$

de même en multipliant la formule (18) donne en substituant les valeurs de P, P'

$$\sqrt{\frac{\omega'}{\pi}} = P^3 P' \cdot (1-r)(1-r^2)(1-r^3)\dots$$

et de là:

$$22 \dots (1-r)(1-r^2)(1-r^3)(1-r^4)\dots = \frac{\sqrt{2} \sqrt{b} \cdot \sqrt{3c}}{\sqrt{r} \cdot \sqrt{r}} \cdot \sqrt{\frac{\omega'}{\pi}}$$

formule due à M. Jacobi (Tom. III pag 193, ^{plusieurs autres} ~~la~~ le géomètre rapporte ~~un grand nombre~~ ^{plusieurs autres} ~~de~~ ^{de} ~~ces~~ ^{ces} ~~formules~~ ^{formules} très-remarquables et très-élégantes).

On pourra très facilement déduire des formules démontrées précédemment un grand nombre d'autres. En voici quelques-unes des plus remarquables...

Si l'on fait pour abréger

$$23 \dots q = e^{-\frac{\omega'}{\pi} x}$$

on aura:

$$24 \dots \lambda\left(\frac{\omega'}{\pi} x\right) = \frac{2}{\sqrt{c}} \cdot \sqrt{q} \cdot \sin x \cdot \frac{1-2q^2 \cos 2x + q^4}{1-2q \cos 2x + q^2} \cdot \frac{1-2q^4 \cos 2x + q^8}{1-2q^3 \cos 2x + q^6} \dots$$

$$25 \dots \lambda'\left(\frac{\omega'}{\pi} x\right) = 2\sqrt{\frac{b}{c}} \cdot \sqrt{q} \cdot \cos x \cdot \frac{1+2q^2 \cos 2x + q^4}{1-2q \cos 2x + q^2} \cdot \frac{1+2q^4 \cos 2x + q^8}{1-2q^3 \cos 2x + q^6} \dots$$

$$26 \dots \lambda''\left(\frac{\omega'}{\pi} x\right) = \sqrt{b} \cdot \frac{1+2q \cos 2x + q^2}{1-2q \cos 2x + q^2} \cdot \frac{1+2q^3 \cos 2x + q^6}{1-2q^2 \cos 2x + q^6} \dots$$

Ces formules ont été déduites respectivement des formules en changeant c en b et en faisant ensuite

$$\theta = \frac{\omega'}{2} + \frac{\omega'}{2} \sqrt{-1} + \frac{\omega'}{\pi} x \sqrt{-1}$$

En comparant ces valeurs avec celles que M. Jacobi a données pour les mêmes fonctions à l'endroit cité, on parviendra à des résultats dignes de remarque. Ainsi en faisant dans la formule (3) de M. Jacobi $k = c$ on aura:

$$\frac{1+2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x + 2q^9 \cos 6x + \dots}{1-2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + \dots} = \frac{(1+2q \cos 2x + q^2)(1+2q^3 \cos 2x + q^6)(1+2q^5 \cos 2x + q^{10}) \dots}{(1-2q \cos 2x + q^2)(1-2q^3 \cos 2x + q^6)(1-2q^5 \cos 2x + q^{10}) \dots}$$

formules qui a lieu doit avoir lieu pour ^{des} valeurs quelconques réelles de x et q en supposant q moindre que l'unité.

En prenant le logarithme des valeurs de $\lambda\left(\frac{\omega'}{\pi} x\right)$ on trouvera après quelques réductions faciles:

$$28 \dots \log \lambda\left(\frac{\omega'}{\pi} x\right) = \log 2 - \frac{1}{2} \log c + \frac{1}{4} \frac{\omega'}{\pi} \pi + \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{b}{c}} \log \sin x + 2 \left\{ \cos 2x \cdot \frac{q}{1-q} + \frac{1}{2} \cos 4x \cdot \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{1}{3} \cos 6x \cdot \frac{q^3}{1-q^3} + \dots \right\}$$

$$29 \dots \log \lambda'\left(\frac{\omega'}{\pi} x\right) = \log 2 + \frac{1}{2} \log b - \frac{1}{2} \log c - \frac{1}{4} \frac{\omega'}{\pi} \pi + \log \cos x + 2 \left\{ \cos 2x \cdot \frac{q}{1+q} + \frac{1}{2} \cos 4x \cdot \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{1}{3} \cos 6x \cdot \frac{q^3}{1+q^3} + \dots \right\}$$

$$30 \dots \log \lambda''\left(\frac{\omega'}{\pi} x\right) = \frac{1}{2} \log b + 4 \cdot \left\{ \cos 2x \cdot \frac{q}{1-q^2} + \frac{1}{3} \cos 6x \cdot \frac{q^3}{1-q^6} + \dots \right\}$$

en faisant $x = 0$ on trouvera

$$31 \dots \log\left(\frac{1}{c}\right) = 8 \cdot \left\{ \frac{q}{1-q^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{q^3}{1-q^6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{q^5}{1-q^{10}} + \dots \right\}$$

$$32 \dots \log\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{2} \frac{\omega'}{\pi} \pi - 2 \log 2 + 2 \left\{ \frac{q}{1-q} + \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{q^3}{1-q^3} + \dots \right\} = 8 \left\{ \frac{q}{1-r^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{q^3}{1-r^6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{q^5}{1-r^{10}} + \dots \right\}$$

En posant dans les formules (206) et (207) Tom. II pag 180

$x = 1 - \frac{2x}{\pi}$ on trouvera ces expressions:

$$\lambda\left(\frac{\omega'}{\pi} x\right) = \sqrt{\frac{4\pi}{c\omega'}} \left\{ \sin x \cdot \frac{q}{1-q} + \sin 3x \cdot \frac{q^3}{1-q^3} + \sin 5x \cdot \frac{q^5}{1-q^5} + \dots \right\}$$

$$\lambda'\left(\frac{\omega'}{\pi} x\right) = \sqrt{\frac{4\pi}{c\omega'}} \left\{ \cos x \cdot \frac{q}{1+q} + \cos 3x \cdot \frac{q^2}{1+q^3} + \cos 5x \cdot \frac{q^2}{1+q^5} + \dots \right\}$$

33... $\lambda(\frac{\omega'}{\pi}x) = \frac{4\pi}{c\omega'} \cdot \sqrt{q} \cdot \left\{ \sin x \cdot \frac{1}{1-q} + \sin 3x \cdot \frac{q}{1-q^3} + \sin 5x \cdot \frac{q^2}{1-q^5} + \dots \right\}$

34... $\lambda'(\frac{\omega'}{\pi}x) = \frac{4\pi}{c\omega'} \cdot \sqrt{q} \cdot \left\{ \cos x \cdot \frac{1}{1+q} + \cos 3x \cdot \frac{q}{1+q^3} + \cos 5x \cdot \frac{q^2}{1+q^5} + \dots \right\}$

Les formules sont ^{peut-être} les plus simples qu'on puisse trouver pour ^{exprimer} les fonctions elliptiques en quantités connues.

Voici encore deux autres formules, qu'on deduit des équations (204) et (206) Tom II pag 179 en y faisant $x = \frac{\omega}{2} - \omega x$

35... $\chi(\omega'x) = \frac{2\pi}{c\omega'} \cdot \left\{ \frac{r^x - r^{1-x}}{1+r} - \frac{r^{3x} - r^{3-3x}}{1+r^3} + \frac{r^{5x} - r^{5-5x}}{1+r^5} - \dots \right\}$

36... $\chi'(\omega'x) = \frac{2\pi}{c\omega'} \cdot \left\{ \frac{r^x + r^{1-x}}{1-r} - \frac{r^{3x} + r^{3-3x}}{1-r^3} + \frac{r^{5x} + r^{5-5x}}{1-r^5} - \dots \right\}$

où r a la même signification que précédemment.

On peut remarquer que les quantités r et q sont liées entre elles par l'équation: $\log r \cdot \log q = \pi^2 \dots 37$

À l'aide des expressions données plus haut pour les modules c et c' on pourra ^{trouver} une relation générale entre les modules de deux fonctions elliptiques qui sont réductibles l'une à l'autre. En effet on pourra démontrer, comme je l'ai fait dans un des derniers numéros des "Astronomische Nachrichten", que si deux fonctions elliptiques réelles

38... $E(c, \theta) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 \theta}}$, $E(c', \theta') = \int_0^{\theta'} \frac{d\theta'}{\sqrt{1-c'^2 \sin^2 \theta'}}$

donc les modules c et c' sont moindres que l'unité sont réductibles l'une à l'autre à l'aide d'une relation algébrique entre $\sin \theta$ et $\sin \theta'$ il faut qu'on puisse trouver deux nombres entiers m et n tels que l'équation

39... $n \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 \theta}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-c'^2 \sin^2 \theta}} = m \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 \theta}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-c'^2 \sin^2 \theta}}$

soit satisfaite. c' est le complément de c ou $c' = \sqrt{1-c^2}$. Si cette condition est remplie on pourra toujours déterminer $\sin \theta'$ algébriquement en $\sin \theta$ de la sorte que

40... $F(c', \theta') = \alpha \cdot F(c, \theta)$

où α est une coefficient constant.

Cela posé désignons par $\omega'', \omega', r', q'$ les valeurs de ω', ω'', r, q qui correspondent au module c' on aura en vertu de la formule (14)

$\sqrt{c'} = \frac{(1-r')(1-r'^3)(1-r'^5) \dots}{(1+r')(1+r'^3)(1+r'^5) \dots}$ où $r' = e^{-\frac{\omega''}{\omega'} \pi}$

mais l'équation (39) donne $\frac{\omega''}{\omega'} = \frac{n}{m} \cdot \frac{\omega'}{\omega}$ donc $r' = e^{-\frac{n}{m} \frac{\omega'}{\omega} \pi}$ c'est-à-dire $r' = r^{\frac{n}{m}}$. On aura donc ce théorème:

Une fonction elliptique ^{réelle} étant proposée si son module c est donné par la formule

41... $\sqrt{c} = \frac{(1-r)(1-r^3)(1-r^5) \dots}{(1+r)(1+r^3)(1+r^5) \dots}$

on aura le module de toute autre fonction elliptique réelle réductible à la première en mettant au lieu de r la puissance $r^{\frac{n}{m}}$ où n et m sont deux nombres entiers et positifs quelconques, c'est-à-dire on aura en désignant par c' le module de la nouvelle fonction

42... $\sqrt{c'} = \frac{(1-r^{\frac{n}{m}})(1-r^{3\frac{n}{m}})(1-r^{5\frac{n}{m}}) \dots}{(1+r^{\frac{n}{m}})(1+r^{3\frac{n}{m}})(1+r^{5\frac{n}{m}}) \dots}$

On aura encore si l'on fait:

43... $\sqrt{c} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{q} \cdot \frac{1+q^2}{1+q} \cdot \frac{1+q^4}{1+q^3} \cdot \frac{1+q^6}{1+q^5} \dots$

cette formule

44... $\sqrt{c'} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{q^{\frac{m}{n}}} \cdot \frac{1+q^{2\frac{m}{n}}}{1+q^{\frac{m}{n}}} \cdot \frac{1+q^{4\frac{m}{n}}}{1+q^{3\frac{m}{n}}} \cdot \frac{1+q^{6\frac{m}{n}}}{1+q^{5\frac{m}{n}}} \dots$

Dans le cas particulier où le module c est $\frac{1}{\sqrt{2}}$ on a $\omega' = \omega$ donc $r = e^{-\pi} = q$. De là il suit donc le module c de toute fonction elliptique réelle qui est réductible à la fonction $\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2} \sin^2 \theta}}$ sera donné par la formule

45... $\sqrt{c} = \frac{1-e^{-\mu\pi}}{1+e^{-\mu\pi}} \cdot \frac{1-e^{-3\mu\pi}}{1+e^{-3\mu\pi}} \cdot \frac{1-e^{-5\mu\pi}}{1+e^{-5\mu\pi}} \dots$
 $= \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{\pi}{2\mu}} \cdot \frac{1+e^{-\frac{2\pi}{\mu}}}{1+e^{-\frac{\pi}{\mu}}} \cdot \frac{1+e^{-\frac{4\pi}{\mu}}}{1+e^{-\frac{3\pi}{\mu}}} \cdot \frac{1+e^{-\frac{6\pi}{\mu}}}{1+e^{-\frac{5\pi}{\mu}}} \dots$

où μ est un nombre rationnel quelconque.

Dans ce cas d'ailleurs c pourra toujours être exprimé en termes finis à l'aide de radicaux.

Si l'on suppose $c' = c$ on a $c' = c$, $\omega'' = \omega'$, $\omega'' = \omega'$ mais $\frac{\omega''}{\omega'} = \frac{n}{m} \cdot \frac{\omega'}{\omega'} = \frac{n}{m}$ donc $\frac{\omega''}{\omega'} = \sqrt{\frac{n}{m}} = \sqrt{\mu}$. De là nous concluons:

Si deux fonctions elliptiques réelles dont les modules sont complémentaires l'un de l'autre sont réductibles entre elles ~~et fait~~ que le module c sera donné par

la formule
 46... $\sqrt{c} = \frac{1-e^{-\pi\sqrt{\mu}}}{1+e^{-\pi\sqrt{\mu}}} \cdot \frac{1-e^{-3\pi\sqrt{\mu}}}{1+e^{-3\pi\sqrt{\mu}}} \cdot \frac{1-e^{-5\pi\sqrt{\mu}}}{1+e^{-5\pi\sqrt{\mu}}} \dots$

et son complément c' par celle-ci

47... $\sqrt{c'} = \frac{1-e^{-\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}}}{1+e^{-\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}}} \cdot \frac{1-e^{-\frac{3\pi}{\sqrt{\mu}}}}{1+e^{-\frac{3\pi}{\sqrt{\mu}}}} \cdot \frac{1-e^{-\frac{5\pi}{\sqrt{\mu}}}}{1+e^{-\frac{5\pi}{\sqrt{\mu}}}} \dots$

où μ est un nombre rationnel quelconque.

$$49 \dots F(\mathcal{L}, \theta') = k \cdot \sqrt{\mu} \cdot F(c, \theta)$$

Pi l'équation différentielle

$$49 \dots \frac{dy}{\sqrt{A - B \cdot y^2 + C \cdot y^4}} = a \frac{dx}{\sqrt{A + B \cdot x^2 + C \cdot x^4}}$$

A, B, C , a soient réelles; et si a a cette forme
on pourra trouver une infinité de valeurs convenables
pour A, B, C .

$$(1+r)(1+r^3)(1+r^5) \dots = 6\sqrt[24]{\frac{r}{b\epsilon}}$$

done

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\dots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}$$
$$s_0 \dots \frac{1}{\sqrt[24]{y}} \cdot (1+r)(1+r^3)(1+r^9) \dots = \frac{1}{\sqrt[24]{q}} (1+q)(1+q^3)(1+q^9) \dots$$
$$\log x \cdot \log y = x^2$$

$\sqrt[n]{\log\left(\frac{n}{1+r}\right)} \cdot \left(\frac{1}{2} + r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots\right) = \sqrt[n]{\log\left(\frac{1}{r}\right)} \cdot \left(\frac{1}{2} + r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots\right)$

just as in the proof of Cauchy (Exercise in Mathematics).

$$\sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots$$

Christiania le 25 Sept. 1825

[illegible]