THE ABEL PRIZE 2019

L'académie norvégienne des sciences et des lettres
a décidé de décerner le prix Abel 2019 à

Karen Keskulla Uhlenbeck

Université du Texas à Austin

« Pour ses travaux pionniers dans le domaine des équations aux dérivées partielles d'origine géométrique, la théorie de jauge et les systèmes intégrables, et pour l'impact fondamental ses résultats sur l'analyse, la géométrie et la physique mathématique. »

Keskulla Karen Uhlenbeck fait partie des fondateurs de l'analyse géométrique moderne.
Son point de vue a façonné cette discipline et a conduit à certaines des avancées les plus spectaculaires en mathématiques de ces 40 dernières années.

L'analyse géométrique est une discipline des mathématiques où les techniques d'analyse des équations différentielles s'entremêlent à l'étude de problèmes géométriques et topologiques. Plus précisément, on étudie des objets tels que courbes, surfaces, connexions ou champs qui sont les points critiques de fonctionnelles représentant des quantités géométriques telles que énergie et volume. Par exemple, les surfaces minimales sont les points critiques de l'aire et les applications harmoniques sont les points critiques de l'énergie de Dirichlet. Les principales contributions d'Uhlenbeck sont des résultats fondateurs sur les surfaces minimales et les applications harmoniques, la théorie de Yang-Mills et les systèmes intégrables.

Surfaces minimales et « l'analyse des bulles »

Un outil important de l'analyse globale, antérieure aux travaux d'Uhlenbeck, est la condition de compacité de Palais-Smale. Cette condition, inspirée par des travaux plus anciens de Morse, garantit l'existence de minimiseurs de fonctionnelles géométriques. Elle est particulièrement efficace en dimension un, comme pour l'étude des géodésiques fermées.

Uhlenbeck a réalisé que la condition de Palais-Smale n'était pas réalisée dans le cas de surfaces pour des raisons topologiques. Les articles d'Uhlenbeck, co-écrit avec Sacks, sur la fonctionnelle d'énergie pour les applications de surfaces à valeurs dans une variété riemannienne, ont eu une influence considérable et décrivent en détail la perte de la condition de Palais-Smale. Une séquence minimisante d'applications converge en dehors d'un nombre fini de points singuliers. Puis, prés des singularités après un redimensionnement, apparaissent des *bulles* ou *instantons*, c'est-à-dire des applications minimisantes « modèles » de la sphère de dimension 2 à valeurs dans la variété cible.

Uhlenbeck a écrit, en collaboration avec Schoen, deux articles fondateurs sur les applications harmoniques en dimension supérieure. Ces articles ont apporté une compréhension profonde des singularités de solutions d'équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires. L'ensemble singulier qui, dans le cas de surfaces, est constitué uniquement de points isolés est, en dimension supérieure, remplacé par un ensemble de codimension 3.

Les méthodes utilisées dans ces articles révolutionnaires font dorénavant partie de la boîte à outils standard de tout géomètre et analyste. Elles ont été appliquées avec succès à plusieurs autres équations aux dérivées partielles issues de contextes géométriques. En particulier, le phénomène des bulles apparaît dans de nombreux travaux sur les équations aux dérivées partielles, dans l'étude du problème de Yamabe, dans les travaux de Gromov sur les courbes pseudo-holomorphes, ainsi que dans les applications physiques des instantons, en particulier en théorie des cordes.

Théorie de jauge et équations de Yang-Mills

A la suite d'un exposé d'Atiyah à Chicago, l'intérêt d'Uhlenbeck s'est porté sur la théorie de jauge. Elle a été la pionnière de l'étude des équations de Yang-Mills d'un point de vue analytique rigoureux. Ce travail a servi de base pour toutes les recherches ultérieures en théorie de jauge.

La théorie de jauge utlise un fibré vectoriel auxiliaire sur une variété riemannienne. Les objets fondamentaux à étudier sont les connexions sur ce fibré vectoriel. Après le choix d'une trivialisation (ou jauge) une connexion peut être décrite par une forme à valeurs dans les endomorphismes du fibré. Les connexions de Yang-Mills sont des points critiques de fonctionnelles invariantes de jauge. Uhlenbeck a abordé et résolu la question fondamentale consistant à exprimer les équations de Yang-Mills comme un système elliptique, à l'aide de la jauge dite de Coulomb. Ce fut le point de départ du célèbre théorème de compacité d'Uhlenbeck pour les connexions ayant une courbure de norme bornée dans L^p, ainsi que de ses résultats obtenus ultérieurement sur les singularités effaçables des connexions de Yang-Mills définies sur des boules épointées en dimension 4. L'étude des singularités effaçables des connexions de Yang-Mills en dimension supérieure n'a été achevée que beaucoup plus tard par Gang Tian et Terence Tao. Le théorème de compacité d'Uhlenbeck a été un outil crucial de la théorie de Hodge non abélienne et, en particulier, pour démontrer la propreté de la fibration de Hitchin et pour l'existence, obtenue par Corlette, des applications harmoniques équivariantes.

Un autre résultat majeur d'Uhlenbeck est son travail en commun avec Yau sur l'existence de connexions hermitiennes de Yang-Mills sur les fibrés vectoriels holomorphes stables au-dessus des variétés de dimension n, généralisant ainsi un résultat antérieur de Donaldson sur les surfaces complexes. Ce résultat de Donaldson-Uhlenbeck-Yau relie géométrie différentielle et géométrie algébrique, et représente un résultat fondamental pour les applications de la théorie des cordes hétérotiques à la physique des particules.

Les idées d'Uhlenbeck ont bâti les fondements analytiques permettant l'application de la théorie de jauge à la géométrie et à la topologie, de l'important résultat de Taubes sur le recollement des variétés autoduales de dimension 4, aux travaux historiques de Donaldson reliant théorie de jauge et la topologie en dimension 4, ainsi que pour beaucoup d'autres résultats dans ce domaine. Le livre écrit par Uhlenbeck et Dan Freed sur « les instantons et la topologie de dimension 4 » a éduqué et inspiré une génération entière de géomètres différentiels. Uhlenbeck a continué à travailler dans ce domaine, et en particulier obtenu un résultat important avec Lesley Sibner et Robert Sibner sur les solutions non autoduales des équations de Yang-Mills.

Systèmes intégrables et applications harmoniques

L'étude des systèmes intégrables trouve ses racines dans la mécanique classique du XIXème siècle. En utilisant le langage de la théorie de jauge, Uhlenbeck et Hitchin ont réalisé que les applications harmoniques de surfaces à valeurs dans les espaces symétriques se répartissent en familles de dimension 1. En se basant sur cette observation, Uhlenbeck a décrit algébriquement les applications harmoniques de sphères à valeurs dans les grassmaniennes, et montré qu'elles sont reliées à un système intégrable de dimension infinie sur lequel agit l'algèbre de Virasoro. Ce travail fondateur a conduit à une série d'articles fondamentaux d'Uhlenbeck et Chuu-Lian Terng, ainsi qu'à la création d'une école active et fructueuse.

L'impact de l'œuvre charnière d'Uhlenbeck va au-delà de l'analyse géométrique.

L’un des ses premiers articles, très influent, a été consacré à l’étude de la théorie de la régularité d’un système d’équations elliptiques non linéaires, adapté à l’étude des points critiques de fonctionnelles d’énergie d’ordre supérieur. Ce travail approfondit et étend les résultats précédents obtenus par Nash, De Giorgi et Moser sur la régularité des solutions d’une (unique) équation non linéaire, aux solutions de systèmes.

Les résultats pionniers de Karen Uhlenbeck ont eu un impact fondamental sur l’analyse contemporaine, la géométrie et la physique mathématique; ses idées et son influence sur la communauté ont transformé le paysage mathématique dans son ensemble.