THE
ABEL
PRIZE
2019

La Academia de Ciencias y Letras de Noruega ha resuelto conceder el Premio Abel 2019 a

# Karen Keskulla Uhlenbeck

Universidad de Austin, Texas, EE.UU.

“por sus logros pioneros sobre ecuaciones diferenciales parciales geométricas, teoría de gauge y sistemas integrables, y por el impacto fundamental de su trabajo en temas de análisis, geometría y física matemática.”

Karen Keskulla Uhlenbeck es una de los fundadores del análisis geométrico moderno.
Su perspectiva se ha implantado en el campo matemático y ha conducido a algunos de los avances en matemáticas más espectaculares de los últimos 40 años.

El análisis geométrico es un área de las matemáticas en la que las técnicas de análisis y las ecuaciones diferenciales se entrelazan con el estudio de problemas geométricos y topológicos. En particular, se estudian objetos tales como curvas, superficies, conexiones y campos que son puntos críticos de funciones que representan cantidades geométricas como la energía y el volumen. Por ejemplo, las superficies mínimas son puntos críticos del área y las funciones armónicas son puntos críticos de la energía de Dirichlet. Entre las principales aportaciones de Uhlenbeck se incluyen importantes resultados sobre superficies mínimas y funciones armónicas, teoría de Yang-Mills y sistemas integrables.

### Superficies mínimas y análisis de burbujas.

Una valiosa herramienta de análisis global que precede al trabajo de Uhlenbeck es la condición de compacidad de Palais-Smale. Esta condición, inspirada en un trabajo anterior de Morse, garantiza la existencia de minimizadores de funciones geométricas y funciona bien en el caso de los dominios unidimensionales, como las geodésicas cerradas.

Uhlenbeck se dio cuenta de que la condición de Palais-Smale falla en el caso de las superficies debido a razones topológicas. Los trabajos de Uhlenbeck, en coautoría con Sacks, sobre la energía funcional de las aplicaciones de superficies en una variedad riemanniana, han tenido una influencia extraordinaria y describen en detalle lo que sucede cuando se vulnera la condición de Palais-Smale. Una sucesión minimizante de aplicaciones converge fuera de un conjunto finito de puntos singulares y, tras aplicar argumentos de reescalado, describen el comportamiento próximo a las singularidades como burbujas o instantones, que son las soluciones estándar de la aplicación minimizante definida sobre la esfera 2 a valores en la variedad objetivo.

En colaboración con Schoen, Uhlenbeck escribió dos artículos fundamentales sobre la minimización de aplicaciones armónicas en dimensiones más altas. Los artículos aportaban una profunda comprensión de las singularidades en las soluciones de ecuaciones diferenciales parciales elípticas no lineales. El conjunto singular, que en el caso de las superficies consta únicamente de puntos aislados, es reemplazado por un conjunto de codimensión 3 en dimensiones más altas.

Los métodos empleados en estos artículos revolucionarios están actualmente en la caja de herramientas estándar de todo geómetra y analista. Han sido aplicados, con gran éxito, a muchas otras ecuaciones en derivadas parciales y en otros contextos geométricos. En particular, el fenómeno del burbujeo aparece en muchos trabajos sobre ecuaciones en derivadas parciales, en el estudio del problema de Yamabe, en el trabajo de Gromov sobre curvas pseudoholomorfas, y también en aplicaciones físicas de los instantones, especialmente en la teoría de cuerdas.

### Teoría gauge y ecuaciones de Yang-Mills

Después de asistir a una charla impartida por Atiyah en Chicago, Uhlenbeck se interesó por la teoría gauge. Fue pionera en el estudio de las ecuaciones de Yang-Mills desde un punto de vista analítico riguroso. Su trabajo constituyó la base de todas las investigaciones posteriores en el área de la teoría gauge.

La teoría gauge comporta un fibrado vectorial auxiliar sobre una variedad de Riemann. Los objetos de estudio básicos son las conexiones en este fibrado vectorial. Tras escoger una trivialización (gauge), es posible describir una conexión con una 1-forma (funcional lineal) evaluada por matriz. Las conexiones de Yang-Mills son puntos críticos de invariantes gauge. Uhlenbeck abordó y resolvió la cuestión fundamental de expresar las ecuaciones de Yang-Mills como un sistema elíptico, utilizando el llamado gauge de Coulomb. Este fue el punto de partida tanto del célebre teorema sobre compacidad de Uhlenbeck, relativo a las conexiones con curvatura acotada en $L^p$, como de los resultados que obtuvo posteriormente sobre singularidades removibles para ecuaciones de Yang-Mills definidas en bolas cuatridimensionales perforadas. La teoría de la singularidad removible de las ecuaciones de Yang-Mills en dimensiones más altas fue elaborada mucho más tarde por Gang Tian y Terence Tao. El teorema de compacidad de Uhlenbeck fue decisivo para la teoría de Hodge no abeliana y, en particular, en la demostración de la exactitud de la aplicación de Hitchin y el importante resultado de Corlette sobre la existencia de aplicaciones armónicas equivariantes.

Otro resultado importante de Uhlenbeck es su trabajo conjunto con Yau sobre la existencia de conexiones Yang-Mills Hermíticas en fibrados vectoriales holomorfos estables sobre variedades de dimensión compleja n, que generalizó un resultado anterior de Donaldson relativo a las superficies complejas. Este resultado de Donaldson-Uhlenbeck-Yau vincula los desarrollos en geometría diferencial y geometría algebráica, y es un resultado fundamental para las aplicaciones de la teoría de cuerdas heteróticas a la física de partículas.

Las ideas de Uhlenbeck sentaron las bases analíticas para la aplicación de la teoría gauge a la geometría y la topología, el importante trabajo de Taubes sobre lá adhesión de las variedades autoduales de dimensión 4, el trabajo innovador de Donaldson sobre la teoría gauge y la topología cuatridimensional y muchos otros trabajos en este campo. El libro escrito por Uhlenbeck y Dan Freed en materia de *instantones* y topología *cuatridimensional* instruyó e inspiró a toda una generación de geómetras diferenciales. Ella siguió ocupándose de este área y obtuvo, junto con Lesley Sibner y Robert Sibner, un resultado particularmente importante en soluciones no autoduales a las ecuaciones de Yang-Mills.

### Sistemas integrables y aplicaciones armónicas.

El estudio de los sistemas integrables tiene sus raíces en la mecánica clásica del siglo XIX. Aplicando el lenguaje de la teoría gauge, Uhlenbeck y Hitchin se dieron cuenta de que las aplicaciones armónicas definidas sobre superficies a valores en los espacios homogéneos vienen en familias unidimensionales parametrizadas. Basándose en esta observación, Uhlenbeck describió aplicaciones algebraicamente armónicas de esferas en espacios Grasmanianos, relacionándolos con un sistema de dimensión infinita integrable y con acciones de Virasoro. Este trabajo, de extraordinaria importancia, condujo a la elaboración de varios otros artículos esenciales sobre el tema por Uhelenbeck y Chuu-Lian Terng, y creó una escuela dinámica y fructífera.

El principal impacto del trabajo de Uhlenbeck va más allá del análisis geométrico. Ella dedicó un artículo temprano muy influyente al estudio de la teoría de la regularidad de un sistema de ecuaciones elípticas no lineales, de relevancia para el estudio de la aplicación crítica de las funciones de energía de orden superior entre variedades de Riemann. Este trabajo amplía la aplicación de los resultados anteriores de Nash, De Giorgi y Moser sobre la regularidad de las soluciones de ecuaciones no lineales simples a las soluciones de sistemas.

Los resultados pioneros de Karen Uhlenbeck han tenido una enorme influencia en el análisis contemporáneo, la geometría y la física matemática, y sus ideas y liderazgo han transformado el panorama matemático en su totalidad.