THE
ABEL
PRIZE
2016

Die Norwegische Akademie der Wissenschaften verleiht den Abelpreis 2016 an

Sir Andrew J. Wiles

Universität Oxford

„für seinen spektakulären Beweis des Großen Fermatschen Satzes durch die Modularitätsvermutung für semi-stabile elliptische Kurven, mit dem er ein neues Zeitalter der Zahlentheorie eröffnet hat.“

Die Zahlentheorie, ein alter und schöner Zweig der Mathematik, beschäftigt sich mit dem Studium von arithmetischen Eigenschaften der ganzen Zahlen. In ihrer modernen Form ist dieses Gebiet eng verbunden mit komplexer Analysis, algebraischer Geometrie und Darstellungstheorie. Zahlentheoretische Resultate spielen eine große Rolle in unserem Alltag, etwa bei Verschlüsselungsalgorithmen für die Datenübertragung, Finanztransaktionen und digitale Sicherheit.

Der Große Fermatsche Satz, der zuerst im 17. Jahrhundert von Pierre de Fermat formuliert wurde, ist die Aussage, dass es für die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für $n>2$ keine Lösung in positiven ganzen Zahlen gibt. Fermat bewies seine Behauptung für $n=4$, Leonhard Euler fand einen Beweis für $n=3$, und Sophie Germain bewies das erste allgemeine Resultat, das für unendlich viele Primzahlexponenten gilt. Ernst Kummers Untersuchung des Problems legte zahlreiche grundlegende Ideen der algebraischen Zahlentheorie offen, wie ideale Zahlen und die Feinheiten der eindeutigen Faktorisierung. Der vollständige Beweis, der von Andrew Wiles gefunden wurde, stützt sich auf drei weitere Konzepte der Zahlentheorie, nämlich elliptische Kurven, Modulformen und Galoisdarstellungen.

Elliptische Kurven werden durch kubische Gleichungen in zwei Variablen definiert. Sie sind der natürliche Definitionsbereich der elliptischen Funktionen, die auf Niels Henrik Abel zurückgehen. Modulformen sind hoch symmetrische analytische Funktionen, die auf der oberen Hälfte der komplexen Ebene definiert sind und auf natürliche Weise durch Formen faktorisieren, die als Modulkurven bekannt sind. Eine elliptische Kurve wird als modular bezeichnet, wenn sie durch eine Abbildung von einer dieser Modulkurven parametrisiert werden kann. Die Modularitätsvermutung, die in den 1950er und 1960er Jahren von Goro Shimura, Yutaka Taniyama und André Weil vorgeschlagen wurde, behauptet, dass jede über den rationalen Zahlen definierte elliptische Kurve modular ist.

Im Jahre 1984 ordnete Gerhard Frey jedem hypothetischen Gegenbeispiel zum Großen Fermatschen Satz eine semi-stabile elliptische Kurve zu und äußerte die starke Vermutung, dass diese elliptische Kurve nicht modular sei. Die Nichtmodularität von Freys Kurve wurde 1986 von Kenneth Ribet mit Hilfe von Überlegungen bewiesen, die auf die Epsilon-Vermutung von Jean-Pierre Serre zurückgehen. Somit würde ein Beweis der Taniyama-Shimura-Vermutung über die Modularität von semi- stabilen elliptischen Kurven auch einen Beweis des Großen Fermatschen Satzes nach sich ziehen. Damals galt die Modularitätsvermutung jedoch noch als völlig unerreichbar. Es war daher ein spektakulärer Durchbruch, als Andrew Wiles in einem 1995 veröffentlichen bahnbrechenden Artikel seine Methode des »modularity lifting« vorstellte und den semi-stabilen Fall der Modularitätsvermutung bewies.

Die Methode des »modularity lifting« von Wiles betrifft die Galois- Symmetrien von Punkten endlicher Ordnung in der abelschen Gruppenstruktur auf einer elliptischen Kurve. Aufbauend auf Barry Mazurs Reformationstheorie von solchen Galoisdarstellungen identifizierte Wiles ein numerisches Kriterium, das sicherstellt, dass die Modularität für die Punkte der Ordnung p zur Modularität für die Punkte der Ordnung einer beliebigen Potenz von p hochgehoben werden kann. Diese hochgehobene Modularität genügt dann, um die Modularität der elliptischen Kurve zu beweisen. Das numerische Kriterium wurde im semi-stabilen Fall durch Verwendung einer bedeutenden Zusatzarbeit bestätigt, die er gemeinsam mit Richard Taylor verfasste. Theoreme von Robert Langlands und Jerrold Tunnell zeigen, dass in vielen Fällen die durch Punkte der Ordnung drei gegebene Galoisdarstellung modular ist. Durch einen raffinierten Wechsel von einer Primzahl zu einer anderen zeigte Wiles, dass in den verbleibenden Fällen die Galoisdarstellung, die durch Punkte der Ordnung fünf gegeben ist, modular ist. Dies vollendete seinen Beweis der Modularitätsvermutung und damit auch des Großen Fermatschen Satzes.

Die neuen Ideen, die von Wiles eingeführt wurden, waren ausschlaggebend für viele nachfolgende Entwicklungen, darunter den Beweis des allgemeinen Falls der Modularitätsvermutung im Jahre 2001 durch Christophe Breuil, Brian Conrad, Fred Diamond und Richard Taylor. Erst kürzlich, 2015, bewiesen Nuno Freitas, Bao V. Le Hung und Samir Siksek die analoge Modularitätsaussage für reelle quadratische Zahlkörper. Nur wenige Resultate haben eine so reiche mathematische Geschichte und einen so dramatischen Beweis wie der Große Fermatsche Satz.