THE ABEL PRIZE 2020

L’Académie des sciences et des lettres de Norvège
a décidé de décerner le prix Abel 2020 à

Hillel Furstenberg

Université hébraïque
de Jérusalem, Israël

Gregory Margulis

Université de Yale, New Haven,
CT, États-Unis

« pour leur travail de pionnier dans l’utilisation des méthodes probabilistes et dynamiques en théorie des groupes, théorie des nombres et combinatoire. »

Une branche centrale de la théorie des probabilités est l’étude des marches aléatoires, telles que la déambulation d’un touriste explorant une ville inconnue et qui décide, par pile ou face, de tourner à droite ou à gauche à chaque intersection. Hillel Furstenberg et Gregory Margulis ont utilisé les marches aléatoires pour étudier la structure des groupes linéaires, c’est-à-dire des familles de matrices stables par inverse ou produit. Il s’agit de comprendre comment le produit de matrices choisies au hasard évolue, et ce que la croissance de ce produit dit sur la structure du groupe.

Furstenberg et Margulis ont introduit des concepts visionnaires et puissants, résolu de formidables problèmes et découvert des liens surprenants et fructueux entre théorie des groupes, théorie des probabilités, théorie des nombres, combinatoire et théorie des graphes. Leur travail a créé une école de pensée qui a eu un impact profond sur de nombreux domaines des mathématiques et de leurs applications.

En partant de l’étude des produits aléatoires de matrices, en 1963, Hillel Furstenberg a introduit et classifié une notion d’importance fondamentale, appelée aujourd’hui bord de Furstenberg. Grâce à ce dernier, il a démontré une formule de Poisson exprimant les fonctions harmoniques sur un groupe général en termes de ses valeurs limites. Dans ses travaux sur les marches aléatoires au début des années 1960, certains en collaboration avec Harry Kesten, il a également obtenu un critère important de positivité pour le plus grand exposant de Lyapunov.

Motivé par l’approximation diophantienne, Furstenberg a introduit en 1967 la notion de disjonction de systèmes ergodiques, notion proche de celle d’entiers premiers entre eux. Cette notion naturelle s’est avérée extrêmement profonde et s’applique à un large éventail de domaines, comme le traitement du signal et les questions de filtrage en génie électrique, la géométrie des ensembles fractals, les flots homogènes et la théorie des nombres. Sa « conjecture ×2 ×3 » est d’une simplicité magnifique et a engendré de nombreux développements. En partant des deux applications du cercle unité complexe dans lui-même qui consistent à élever au carré et au cube, il a montré que les seuls ensembles fermés invariants par ces deux applications sont, soit le cercle tout entier, soit finis. Il conjecture que les seules mesures invariantes sont soit de support fini, soit invariantes par rotation. Malgré les efforts de nombreux mathématiciens, cette question de classification de mesures reste ouverte. La classification de mesures invariantes sous l'action de groupes est devenue un vaste domaine de recherche, influençant les travaux sur l'ergodicité arithmétique quantique, les surfaces de translation, la version de Margulis de la conjecture de Littlewood et les travaux spectaculaires de Marina Ratner. Dans un cadre géométrique, Furstenberg a démontré en 1972 un autre résultat de classification de mesures : l'unique ergodicité du flot horocyclique pour les surfaces hyperboliques, résultat à la nombreuse descendance.

En utilisant la théorie ergodique et son théorème de récurrence multiple, Furstenberg a donné en 1977 une nouvelle et étonnante preuve du théorème de Szemerédi sur l'existence de grandes progressions arithmétiques pour les sous-ensembles d'entiers de densité positive. Plus tard, avec Yitzhak Kaztnelson, Benjamin Weiss et d'autres collaborateurs, il a trouvé des généralisations de grande portée du théorème de Szemerédi en dimension supérieure ainsi que de nouvelles applications de la dynamique topologique et de la théorie ergodique à la théorie de Ramsey et à la combinatoire additive. Ces résultats ont influencé de nombreux développements ultérieurs, notamment les travaux de Ben Green, Terence Tao et Tamar Ziegler sur la conjecture de Hardy-Littlewood et les progressions arithmétiques de nombres premiers.

Gregory Margulis a révolutionné l'étude des réseaux de groupes semi-simples. Un réseau dans un groupe est un sous-groupe discret tel que le quotient a un volume fini. Pour les groupes semi-simples, Margulis a classifié ces réseaux dans ses théorèmes de « superrigidité » et d'« arithméticité » au milieu des années 1970. Armand Borel et Harish-Chandra avaient construit des réseaux dans des groupes semi-simples en utilisant des constructions arithmétiques, essentiellement en tant que groupes de matrices à coefficients entiers dans un grand groupe de matrices. Margulis a démontré que tous les réseaux en rang 2 ou supérieur proviennent de cette construction arithmétique, comme Atle Selberg l'avait prédit. En 1978, Margulis a dévoilé la structure de ces réseaux dans son « théorème du sous-groupe normal ». Au centre de ses techniques se trouve l'utilisation surprenante de méthodes probabilistes (marches aléatoires, théorème d'Oseledets, moyennabilité, bord de Furstenberg) ainsi que de la propriété (T) de Kazhdan.

Dans sa thèse de 1970, Margulis a construit la mesure dite de « Bowen-Margulis » pour une variété riemannienne compacte de courbure strictement négative. En utilisant la propriété de mélange du flot géodésique, il a démontré un analogue du théorème des nombres premiers : une formule asymptotique pour le nombre de géodésiques fermées plus courtes qu'une longueur donnée. Auparavant, le seul résultat de comptage de ce type provenait de la formule des traces de Selberg, formule uniquement valable dans le cadre des espaces localement symétriques. Depuis lors, de nombreux problèmes de comptage et d'équidistribution ont été résolus en utilisant l'approche par mélange de Margulis.

Une autre application spectaculaire de ses méthodes est la preuve en 1984 de la conjecture d'Oppenheim en théorie des nombres, conjecture vieille de plusieurs décennies : une forme quadratique non dégénérée ayant au moins 3 variables, et qui n'est pas le multiple d'une forme à coeffcients rationnels, prend sur les entiers un ensemble dense de valeurs.

En théorie des graphes, la créativité de Margulis a abouti à la construction en 1973 de la première famille explicite d'expanseurs connue, grâce à la propriété (T) de Kazhdan. Un expanseur est un graphe avec une connectivité élevée. Cette notion, introduite par Mark Pinsker, à son origine dans l'étude des réseaux dans les systèmes de communication. Les graphes expanseurs sont désormais un outil fondamental en informatique, notamment pour les codes de correction d'erreurs. En 1988, Margulis a construit des expanseurs optimaux, maintenant connus sous le nom de graphes de Ramanujan, et qui ont été découverts indépendamment par Alex Lubotzky, Peter Sarnak et Ralph Phillips.

L'influence de Furstenberg et Margulis s'étend bien au-delà de leurs résultats et de leur domaine d'origine. Ils sont reconnus comme pionniers par une large communauté de mathématiciens, qui va de la théorie de Lie, des groupes discrets et des matrices aléatoires, jusqu'à l'informatique et la théorie des graphes. Ils ont démontré l'omniprésence des méthodes probabilistes, et l'utilité qu'il y a à franchir les frontières entre disciplines mathématiques, en dépassant la dichotomie traditionnelle entre mathématiques pures et appliquées.