THE
ABEL
PRIZE
2016

L'Accademia norvegese di Scienze e di Lettere
ha deciso di attribuire il Premio Abel per il 2016 ad

Andrew J. Wiles

Università di Oxford

"per la sua stupefacente dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat mediante la congettura di modularità per le curve ellittiche semistabili, con cui ha inaugurato una nuova era della teoria dei numeri."

La teoria dei numeri è un antico e affascinante ramo della matematica che studia le proprietà aritmetiche dei numeri interi. Nella sua forma moderna, questa disciplina è intrinsecamente legata all'analisi complessa, alla geometria algebrica e alla teoria delle rappresentazioni. I risultati della teoria dei numeri rivestono un ruolo di primaria importanza nella vita di tutti i giorni attraverso gli algoritmi crittografici utilizzati per le comunicazioni, le transazioni finanziarie e la sicurezza digitale.

L'Ultimo Teorema di Fermat, formulato per la prima volta da Pierre de Fermat nel diciassettesimo secolo, postula che se n>2, l'equazione $x^n + y^n = z^n$ non ammette soluzioni intere positive. Fermat riuscì a dimostrare che l'equazione non ammetteva soluzioni per n=4, Eulero provò che la congettura era vera per n=3, mentre Sophie Germain dimostrò il primo risultato generale applicabile a un numero infinitamente grande di esponenti primi. Lo studio del problema da parte di Ernst Kummer permise di mettere in luce molti concetti basilari della teoria algebrica dei numeri, come i numeri ideali e le sottigliezze della fattorizzazione unica. La dimostrazione completa di Andrew Wiles si basa su altri tre concetti della teoria dei numeri, ovvero curve ellittiche, forme modulari e rappresentazioni di Galois.

Le curve ellittiche sono definite da equazioni cubiche in due variabili. Sono i naturali domini di definizione delle funzioni ellittiche introdotte da Niels Henrik Abel. Le forme modulari sono funzioni analitiche altamente simmetriche definite sulla metà superiore del piano complesso e che si fattorizzano naturalmente attraverso forme chiamate curve modulari. Una curva ellittica è detta modulare se può essere parametrizzata da una mappa definita su una di queste curve modulari. La congettura di modularità, elaborata da Goro Shimura, Yutaka Taniyama e André Weil negli anni Cinquanta e Sessanta, postula che tutte le curve ellittiche definite sui razionali sono modulari.

Nel 1984, Gerhard Frey associò a titolo congetturale una curva ellittica semistabile a un controesempio dell'Ultimo Teorema di Fermat, sostenendo con forza la convinzione che quella curva ellittica non poteva essere modulare. La congettura di Frey sulla non-modularità fu dimostrata nel 1986 da Kenneth Ribet usando la epsilon congettura di Jean-Pierre Serre. Di conseguenza la dimostrazione della congettura di modularità delle curve ellittiche semistabili di Shimura-Taniyama-Weil avrebbe fornito anche una dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat. Tuttavia, a quell'epoca si riteneva che la congettura di modularità fosse assolutamente inaccessibile. Destò pertanto grande sensazione l'articolo pubblicato nel 1995, in cui Andrew Wiles presentò il metodo di esponenziazione modulare e dimostrò il caso semistabile della congettura di modularità.

Il metodo di esponenziazione modulare di Wiles riguarda le simmetrie di Galois dei punti di ordine finito in una struttura di gruppo abeliano su una curva ellittica. Basandosi sulla teoria delle deformazioni formulata da Barry Mazur per le rappresentazioni di Galois, Wiles individuò un criterio numerico che assicurava che la modularità dei punti di ordine p può essere elevata alla modularità dei punti pari a una qualsiasi potenza di p, dove p è un numero primo dispari. Questa esponenziazione modulare è quindi sufficiente per provare che la curva ellittica è modulare. Il criterio numerico fu confermato per il caso semistabile utilizzando un importante articolo complementare scritto da Wiles insieme a Richard Taylor. I teoremi di Robert Langlands e Jerrold Tunnell dimostrano che in molti casi la rappresentazione di Galois data dai punti di ordine tre è modulare. Passando in modo ingegnoso da un numero primo a un altro, Wiles dimostrò che nei casi rimanenti la rappresentazione di Galois data dai punti di ordine cinque è modulare. In questo modo completò la dimostrazione della congettura di modularità e quindi anche l'Ultimo Teorema di Fermat.

Le nuove idee introdotte da Wiles sono state decisive per molti sviluppi successivi, compresa la dimostrazione, nel 2001, del caso generale della congettura di modularità da parte di Christophe Breuil, Brian Conrad, Fred Diamond e Richard Taylor. Pochi mesi fa, nel 2015, Nuno Freitas, Bao V. Le Hung e Samir Siksek hanno dimostrato un enunciato di modularità sopra i campi di numeri quadratici reali. Pochi risultati matematici hanno una storia tanto varia e una dimostrazione così ricca di colpi di scena come l'Ultimo Teorema di Fermat.