THE ABEL PRIZE 2020

Академия Наук Норвегии приняла решение присудить Абелевскую премию за 2020 год

Хилелю (Гилелю) Фюрстенбергу

Еврейский университет в Иерусалиме, Израиль

Грегори (Григорию Александровичу) Маргулису

Йельский университет, Нью Хэвен, Коннектикут, США

«за новаторское использование методов теории вероятностей и динамических систем в теории групп, теории чисел и комбинаторике.»

Главное место в теории вероятностей занимает изучение случайных блужданий, таких, как, например, выбор маршрутов туристами при прогулках по незнакомому городу способом подбрасывания монетки на каждом перекрестке, чтобы решить, идти ли направо или налево. Хилель Фюрстенберг и Григорий Маргулис придумали и развили методы применения случайных блужданий для исследования структур линейных групп, к которым, например, относятся множества матриц, замкнутые относительно умножения и взятия обратной. Изучение роста случайных блужданий, а именно произведений случайно выбранных матриц, позволяет узнать больше о структуре таких групп.

Фюрстенберг и Маргулис ввели основополагающие и глубокие понятия, которые привели к решению фундаментальных проблем и открытию удивительных и плодотворных связей между теорией групп, теорией вероятностей, теорией чисел, комбинаторикой и теорией графов. Их труды создали новый образ мысли, оказавший глубокое влияние на многие области математики и ее применения.

Начав с изучения случайных произведений матриц в 1963 г., Хилель Фюрстенберг ввел и изучил фундаментальный объект, который сейчас называется границей Фюрстенберга. Используя его, он вывел аналог формулы Пуассона, выражающий гармонические функции на группе в терминах их граничных значений. В своих работах о случайных блужданиях, вышедших в начале 60-х годов, частично в сотрудничестве с Харри

Кестеном, он также получил важный критерий положительности наибольшей из экспонент Ляпунова.

Мотивируемый теорией диофантовых приближенией, Фюрстенберг в 1967 г. ввел понятие дизъюнктности в эргодической теории, понятие аналогичное понятию взаимной простоты для целых чисел. Это естественное понятие оказалось крайне глубоким и получило применение в широком спектре областей науки, включая обработку и фильтрование сигналов в электротехнике, геометрические характеристики фрактальных множеств, однородные потоки и теорию чисел. Его «гипотеза x2 x3» является великолепным примером простого вопроса, который вдохновил множество последующих достижений. Фюрстенберг рассмотрел отображения удваивания и утраивания аргумента на окружности и доказал, что замкнутое множество, инвариантное относительно обоих этих отображений, является или конечным, или полной окружностью. Его гипотеза состоит в аналогичном утверждении для мер на окружности, а именно предполагает, что инвариантная мера или имеет конечный носитель, или инвариантна относительно поворотов. Несмотря на усилия многих математиков, вопрос о верности этой гипотезы остается открытым. Классификация мер, инвариантных под действием групп, выросла в широкое поле исследований, оказывающее влияние на квантовую арифметическую эргодичность, поверхности сдвига, Маргулисову версию гипотезы Литтлвуда и выдающиеся работы Марины Ратнер. Рассматривая инвариантные меры в геометрическом контексте, Фюрстенберг доказал в 1972 г. строгую эргодичность потока орициклов для гиперболических поверхностей – результат, повлекший за собой множество других исследований.

В 1977 г. Фюрстенберг использовал свои результаты в эргодической теории, чтобы вывести великолепное новое доказательство теоремы Семереди о том, что подмножество целых чисел, имеющее положительную плотность, содержит арифметические прогрессии любой длины. В последующих трудах с Ицхаком Кацнельсоном, Бенджамином Вейссом и другими он обнаружил более глубокие и многомерные обобщения теоремы Семереди, а также и другие применения топологической динамики и эргодической теории к теории Рамсея и аддитивной комбинаторике. Эти работы оказали влияние на многие последующие разработки, включая работы Бена Грина, Терренса Тао и Тамар Деборы Зиглер по гипотезе Харди-Литтлвуда и арифметическим прогрессиям среди простых чисел.

Григорий Маргулис совершил революцию в теории решеток в полупростых группах. Решетка в теории групп – это дискретная подгруппа, факторпространство по которой имеет конечный объём. Для полупростых групп Маргулис классифицировал решетки в своих теоремах середины 1970-х годов о «супержёсткости» и «арифметичности». Арман Борель и Хариш-Чандра построили решетки в полупростых группах, используя арифметические конструкции, аналогичные группам целочисленных матриц в больших группах матриц. Маргулис доказал, что все решетки ранга выше 2 проистекают из этой арифметической конструкции, как предположил Атле Сельберг. В 1978 г. Маргулис описал структуру этих решеток в своей «теореме о нормальной подгруппе». Центральным в его подходе является поразительное и неожиданное использование им вероятностных методов (случайные блуждания, теорема Оселедеца, аменабельность, граница Фюрстенберга), а также свойства (Т) Каждана.

В своей диссертации в 1970 г. Маргулис построил так называемую «меру Боуэна-Маргулиса» компактного Риманова многообразия строго отрицательной кривизны. Используя свойство смешивания геодезических потоков применительно к этой мере, он доказал аналог теоремы о распределении простых чисел, – асимптотическую формулу для количества замкнутых геодезических ограниченной длины. До этого динственным результатом такого рода была формула следа Сельберга, применимая только в отношении локально симметричных пространств. С тех пор многочисленные задачи подсчета количества и равномерности распределения были изучены с использованием подхода Маргулиса.

Другое эффектное применение его методов – это доказательство в 1984 г. выдвинутой десятки лет назад гипотезы Оппенгейма в теории чисел: невырожденная квадратичная форма, имеющая более 3 переменных, или принимает плотное множество значений на целых числах, или кратна форме с рациональными коэффициентами.

В теории графов креативный талант Маргулиса вылился в построение в 1973 г. первого конкретного семейства экспандеров, с использованием свойства (T) Каждана. Экспандер – это граф с высокой степенью связности. Это понятие было введено Марком Пинскером для исследования сетей в системах передачи информации. С тех пор экспандеры стали фундаментальным инструментом в компьютерных науках и кодах исправления ошибок. В 1988 г. Маргулис сконструировал оптимальные экспандеры, известные сейчас как графы Рамануджана, которые, независимо открыли Александр Любоцкий, Питер Сарнак и Ральф Филипс.

Влияние Фюрстенберга и Маргулиса распространяется намного шире их областей деятельности. Они признаны первооткрывателями широким кругом профессиональной математической общественности в таких областях, как теория Ли, дискретных групп и случайных матриц, а также компьютерные науки и теория графов. Они продемонстрировали повсеместное распространение и применимость вероятностных методов и эффективность пересечения границ между отдельными математическими дисциплинами, а также между чистой и прикладной математикой, с их традиционным разделением.