THE ABEL PRIZE 2015

قررت الأكاديمية النرويجية للعلوم والآداب منح جائزة أبيل لعام ٢٠١٥ إلى "جون ف ناش الابن John F. Nash, Jr."، جامعة برينستونو"لويس نيرنبرغ Louis Nirenberg"، معهد كورانت، جامعة نيويورك.

للمساهمات الملفتة للنظر والأساسية في نظرية المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية وتطبيقاتها في التحليل الهندسي.

تستخدم المعادلات التفاضلية الجزئية في وصف القوانين الأساسية للظواهر في الفيزياء، والكيمياء، والبيولوجيا، وغيرها من العلوم. كما أنها مفيدة في تحليل الأشكال الهندسية، كما ثبت ذلك من خلال العديد من النجاحات التي تحققت في العقود الماضية.

قام كل من جون ف. ناش John F. Nash ولويس نيرنبرغ Louis Nirenberg بدور رائد في تطوير هذه النظرية من خلال حل المسائل الأساسية وإدخال أفكار عميقة عليها. وقد تطورت إنجازاتهم لتصبح تقنيات متنوعة وقوية، وأصبحت أدوات أساسية لدراسة المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية. ويمكن لمس آثارها في جميع فروع هذه النظرية، بدءاً من نتائج الوجود الأساسية وصولا إلى الدراسة النوعية للحلول، وذلك في الإعدادات السلسة وغير السلسة على السواء. وتتسم هذه النتائج أيضا بأهمية في التحليل العددي للمعادلات التفاضلية الجزئية.

لقد كانت نظريات التطبيق المتباين متساوي القياس Isometric embedding theorems، التي تظهر إمكانية تحقيق هندسة جوهرية كمتنوعة جزئية من الفضاء الإقليدي، بمثابة دوافع لهذه التطورات. وكانت نظريات التطبيقات المتباينة التي وضعها "ناش Nash" من بين أكثر النتائج الأصلية في التحليل الهندسي في القرن العشرين. فمن خلال إثبات إمكانية تحقيق هندسة ريمانية Riemannian geometry بسلاسة كمتنوعة جزئية من الفضاء الإقليدي، ترسي نظرية "ناش Nash" السلسة (C∞) معادلة بين وجهة نظر "ريمان Riemann" الجوهرية وبين النهج العرضي السابق. وتظهر نظرية التطبيق المتباين لـ "ناش Nash" غير السلسة (C1)، التي أدخل "كويبر Kuiper" تحسينات عليها، إمكانية تحقق تطبيقات متباينة قد تبدو في البداية أنها محظورة وفقا لثوابت هندسية مثل انحناء "غاوس Gauss"؛ هذه النظرية هي في صميم النظرية الكاملة للتكامل المُحدب التي وضعها "غروموف Gromov" ، كما أنها ألهمت التطورات المذهلة التي حدثت مؤخراً في فهم انتظام تدفق سائل غير قابل الانضغاط. فبعد وصف انحناء "غاوس Gauss" أو المقياس الريماني، حل "نيرنبرغ Nirenberg" المشاكل الكلاسيكية لـ "مينكوفسكي Minkowski" و"فايل Weyl" (يجري "بوجوريلوف Pogorelov" في نفس الوقت دراسة لهذا الأخير

Minkowski" و"فايل Weyl" (يجري "بوجوريلوف Pogorelov" في نفس الوقت دراسة لهذا الأخير أيضا) بنظريات التطبيق المتباين الأساسية للفضاء S^2 في R^3. وكانت هذه الحلول مهمة لأن المشاكل كانت ممثلة لمنطقة قيد التطور، ولأن الأساليب التي تم استحداثها كانت مناسبة لمزيد من التطبيقات.

ويقدم كل من عمل ناشالمتعلق بتحقيق متنوعات على شكل مجموعات متنوعة جبرية حقيقية ونظرية "نيولاندر- نيرنبرغ Nirenberg-Newlander" الخاصة بالهياكل المركبة مزيدا من توضيح تأثير كل من الحائزين على جائزة في الهندسة.

وتشكل قضايا الانتظام مصدر قلق يومي في دراسة المعادلات التفاضلية الجزئية، أحيانا من أجل توفير البراهين الصارمة وأحيانا للرؤى النوعية الثمينة التي يقدمونها عن الحلول. وعندما أثبت "ناش Nash"، إلى جانب "دي جيورجي De Giorgi "، أولى تقديرات "هولدير Hölder" لحلول المعادلات الخطية

الإهليلجية الشكل في الأبعاد العامة دون أي افتراض انتظامي على المعاملات، كان هذا بمثابة نقلة نوعية في هذا المجال؛ وقد وفر ذلك، من بين نتائج أخرى، حلا لمسألة "هلبرت Hilbert" التاسع عشرة بشأن تحليلية المخفضات إلى الحد الأدنى لوظائف التكامل الإهليلجي التحليلية. وبعد بضع سنوات من برهان "ناش Nash"، وضع "نيرنبرغ Nirenberg"، جنبا إلى جنب مع "أغمون Agmon" و"دوجليس Douglis"، عدة تقديرات للانتظام المبدع لإيجاد حلول للمعادلات الإهليلجية الخطية مع بيانات L^p، والتي توسع نظرية "شودير Schauder" الكلاسيكية وهي مفيدة للغاية في التطبيقات التي تتوفر فيها مثل هذه الظروف التكاملية عن البيانات. لقد أسست هذه الأعمال للنظرية الحديثة للانتظام، التي تطورت كثيراً منذ ذلك الحين، مع تطبيقات في التحليل والهندسة والاحتمال، حتى في الحالات الخشنة للغاية وغير السلسة.

كما توفر خصائص التناظر معلومات أساسية عن حلول المعادلات التفاضلية غير الخطية، بالنسبة لكل من دراستها النوعية ولتبسيط الحسابات العددية. وقد توصل "نيرنبرغ Nirenberg" بالتعاون مع "جيداس Gidas" و"ني Ni" إلى تحقيق النتائج الأكثر إثارة في هذا المجال: إذ أظهر الباحثان أن كل حل إيجابي لفئة كبيرة من المعادلات غير الخطية الإهليلجية سوف يحمل نفس التناظرات مثل تلك التي توجد في المعادلة نفسها.

وبعيدا عن التقوقع في العمل من أجل التوصل إلى حلول للمسائل التي أُسندت إليهما، أصبحت النتائج التي أثبتها كل من "ناش Nash"و"نيرنبرغ Nirenberg" أدوات مفيدة جداً وتبين لها العديد من التطبيقات المتميزة في سياقات أخرى. من بين الأدوات الاكثر شعبية عدم تباين الاستكمال الداخلي طبقا لـ "ننيرنبرغ Nirenberg"، بما في ذلك عدم التباين طبقا لـ "جاجلياردو-نيرنبرغ Gagliardo-Nirenberg" وعدم التباين طبقاً لـ "جون-نيرنبرغ John Nirenberg". يحكم هذا الأخير إلى أي مدى قد تنحرف وظيفة متوسط التذبذب عن متوسطتها، ويعبر عن الازدواجية غير المتوقعة لفضاء BMO مع فضاء "هاردي Hardy" H^1. وقد أصبحت نظرية الانتظام لـ"ناش Nash"- دي جيورجي-موسر De Giorgi-Moser" وعدم التباين لـ "ناش Nash" (التي أثبتها "شتاين Stein" أولا) الأدوات الرئيسية في دراسة احتمالية أنصاف الرزم في جميع أنواع الأوضاع، من الفضاءات الإقليدية إلى المتنوعات السلسة والفضاءات المترية. إن الدالة العكسية لنظرية "ناش Nash"- "موسر Moser" هي وسيلة قوية من أجل حل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية الاضطرابية من جميع الأنواع. وعلى الرغم من عدم التمكن من تغطية التأثير واسع النطاق لكل من "ناش Nash" و"نيرنبرغ Nirenberg" على الأدوات الحديثة من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية، يجب أن نذكر أيضا نظرية المؤثرات شبه التفاضلية لـ "كوهن Kohn" -"نيرنبرغ Nirenberg"ة.

وبالإضافة إلى كونهما شخصيتين مرموقتين ، كأفراد، إلا أن ناش ونيرنبرغ قد تأثرا ببعضهما البعض في تحليل المعادلات التفاضلية الجزئية من خلال مساهماتهما وتفاعلاتهما سويا. لقد أصبح من الممكن اليزم لمس نتائج حوارهما المثمر، الذي بدأ في الخمسينيات في معهد كورانت للعلوم الرياضية، بقوة أكبر من أي وقت مضى.

正則性の問題は、時には厳密な証明のために、また時には解についての貴重な定性的洞察をもたらすゆえに、偏微分方程式の研究において日常的な懸案である。ナッシュがデ・ジョルジと時を同じくして、係数に関する正則性の仮定なしに一般次元での線形楕円型方程式の解に関する最初のヘルダー評価を証明したのは、この分野において画期的なことであった。何にも増して、これは解析的楕円型積分汎関数の最小化関数の解析性についてのヒルベルトの第十九問題に対する解答へとつながったのである。ナッシュの証明の数年後、ニーレンバーグはアグモン及びダグリスとともに、L^pデータを持つ線形楕円型方程式の解の幾つかの革新的な正則性の評価を確立した。これは古典的なシャウダーの理論を拡張し、このようなデータの可積分条件がある状況への応用に極めて有用である。これらの業績は現代の正則性理論の基礎となり、以来、この理論は、非常に粗くなめらかでない状況においても解析、幾何学及び確率に応用されて、目覚しい発展を遂げてきた。

対称性も非線形微分方程式の解に関して、その定性研究と数値計算の簡略化の両方に、不可欠な情報を提供している。この分野における最も素晴らしい成果の一つは、ニーレンバーグがガイダス及びニーと協力して成し遂げた。彼らは広範なクラスの非線形楕円型方程式のそれぞれの正の解が方程式自体に存在するのと同じ対称性を提示することを示したのである。

ナッシュとニーレンバーグによって証明された成果は、意図された問題の解答の域をはるかに超えて、非常に有用なツールとなり、更なるコンテクストにおいて幅広く応用されてきた。これらのツールの中で最もよく知られているのは、ガリアード＝ニーレンバーグの不等式とジョン＝ニーレンバーグの不等式を含む、ニーレンバーグによる補間不等式である。ジョン＝ニーレンバーグの不等式は、有界平均振動関数がどれだけその平均値から逸脱し得るかを統括

し、ハーディー空間 H^1 と BMO 空間の予想外の双対性を表現する。ナッシュ＝デ・ジョルジ＝モーザーの正則性理論と（最初にシュタインによって証明された）ナッシュ不等式は、ユークリッド空間から滑らかな多様体及び距離空間に至る、あらゆる設定における確率的半群の研究の鍵となるツールになった。ナッシュ＝モーザーの逆写像定理は、あらゆる種類の摂動非線形偏微分方程式を解くための強力な方法である。ナッシュとニーレンバーグの非線形偏微分方程式に関する現代のツールボックスへの広範囲に及ぶ影響をここで言い尽くすことは不可能だが、コーン＝ニーレンバーグの擬微分作用素の理論にも言及しなければならない。

ナッシュとニーレンバーグは、個々に最高峰の数学者であることに加えて、その貢献と交流を通じてお互いに影響し合ってきた。彼らが１９５０年代にクーラント数学研究所で始めた実り多い対話の成果は、今日、これまでにないほど強く感じられる。