THE
ABEL
PRIZE
2015

Die Norwegische Akademie der Wissenschaften verleiht den Abel-Preis 2015 an **John F. Nash Jr.**, Princeton University, und **Louis Nirenberg**, Courant Institute, New York University,

„für ihre herausragenden und bahnbrechenden Beiträge zur Theorie der nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen und ihre Anwendungen in der geometrischen Analysis.“

Partielle Differentialgleichungen werden verwendet, um die grundlegenden Gesetze von Phänomenen der Physik, Chemie, Biologie und anderen Wissenschaften zu beschreiben. Sie sind auch bei der Analyse von geometrischen Objekten nützlich, wie zahlreiche Erfolge in den vergangenen Jahrzehnten gezeigt haben.

John Nash und Louis Nirenberg haben durch die Lösung von grundlegenden Problemen und die Einführung von tiefen Gedanken eine führende Rolle bei der Entwicklung dieser Theorie gespielt. Ihre Entdeckungen wurden zu vielseitigen und robusten Verfahren weiterentwickelt, die zu wesentlichen Werkzeugen für das Studium nichtlinearer partieller Differentialgleichungen geworden sind. Ihr Einfluss ist in allen Bereichen der Theorie zu spüren, von grundlegenden Existenzsätzen bis zu qualitativen Studien von Lösungen im glatten wie nichtglatten Zusammenhang. Ihre Ergebnisse sind auch für die numerische Analysis von partiellen Differentialgleichungen von Interesse.

Isometrische Einbettungssätze, welche die Realisierung einer intrinsischen Geometrie als Untermannigfaltigkeit des euklidischen Raumes ermöglichen, haben einige dieser Entwicklungen angestoßen. Nashs Einbettungssätze gehören zu den originellsten Leistungen in der geometrischen Analysis des zwanzigsten Jahrhunderts. Mit dem Nachweis, dass jede Riemannsche Mannigfaltigkeit als eine glatte Untermannigfaltigkeit des euklidischen Raums begriffen werden kann, begründet Nashs C^∞-Einbettungssatz die Gleichwertigkeit der Riemannschen intrinsischen Sichtweise mit dem älteren extrinsischen Ansatz. Nashs nichtglattes (C^1) Einbettungstheorem, von Kuiper optimiert, zeigt die Möglichkeit der Realisierung von Einbettungen auf, die auf den ersten Blick wegen geometrischer Invarianten wie der Gaußschen Krümmung unmöglich zu sein scheinen. Dieses Theorem ist das Herzstück der Gromovschen Theorie von der konvexen Integration und hat in jüngster Zeit auch zu spektakulären Fortschritten beim Verständnis der Regularität inkompressibler Flüssigkeitsströmungen geführt. Nirenberg löste mit seinen grundlegenden Einbettungssätzen für die Sphäre S^2 in R^3 mit vorgeschriebener Gaußscher Krümmung oder Riemannscher Metrik die klassischen Probleme von Minkowski und Weyl (die letzteren gleichzeitig mit Pogorelov). Diese Lösungen waren von großer Bedeutung, einerseits weil die Probleme repräsentativ für ein neu sich entwickelndes Gebiet wurden, andrerseits weil die geschaffenen Methoden für weitere Anwendungen geeignet waren.

Nashs Resultate über die Realisierung von Mannigfaltigkeiten als reelle algebraische Varietäten und das Newlander-Nirenberg-Theorem über komplexe Strukturen zeigen anschaulich den Einfluss der beiden Preisträger auf die Geometrie.

Fragen der Regularität tauchen beim Studium partieller Differentialgleichungen ständig auf, manchmal aus Gründen exakter Beweisführung und manchmal wegen der durch sie gewährten wertvollen qualitativen Einblicke in die Lösungen. Es war ein Durchbruch, als Nash, parallel zu De Giorgi, die ersten Hölderschen Ungleichungen für Lösungen linearer elliptischer Gleichungen in allgemeinen Dimensionen ohne jede Regularitätsforderung an die Koeffizienten bewies. Eine der Folgerungen war die Lösung des 19. Hilbertschen Problems: Sind die Lösungen regulärer Variationsprobleme stets notwendig analytisch? . Ein paar Jahre nach Nashs Beweis fand Nirenberg zusammen mit Agmon und Douglis weitere innovative Regularitätsabschätzungen für Lösungen linearer elliptischer Gleichungen mit L^p-Daten, welche die klassische Schauder-Theorie erweitern und sich als extrem nützlich bei Anwendungen erweisen, bei denen solche Integrabilitätsbedingungen für die Daten verfügbar sind. Diese Arbeiten begründeten die moderne Regularitätstheorie, die seither ein immenses Wachstum erlebt hat und in der Analysis, Geometrie und Wahrscheinlichkeitstheorie angewendet wird, sogar in sehr rauen, nichtglatten Situationen.

Auch Symmetrieeigenschaften liefern wichtige Informationen zur Lösung von nichtlinearen Differentialgleichungen, sowohl für deren qualitatives Studium als auch zur Vereinfachung der numerischen Berechnungen. Eine der spektakulärsten Leistungen in diesem Bereich wurde von Nirenberg in Zusammenarbeit mit Gidas und Ni erbracht: sie wiesen nach, dass jede positive Lösung für eine große Klasse von nichtlinearen elliptischen Gleichungen dieselben Symmetrien zeigt wie die, welche in der Gleichung selbst vorhanden sind.

Keinesfalls beschränkt auf die Lösungen der Probleme, für die sie entwickelt wurden, haben die Ergebnisse von Nash und Nirenberg sich als sehr nützliches Instrumentarium erwiesen, das in vielen Zusammenhängen äußerst eindrucksvolle Anwendungen gefunden hat. Ein besonders beliebtes Werkzeug sind Nirenbergs Interpolationsungleichungen, darunter die Gagliardo-Nirenberg-Ungleichungen und die John-Nirenberg-Ungleichung. Letztere bestimmt, wie weit eine Funktion beschränkter mittlerer Oszillation von ihrem Mittelwert abweichen kann, und drückt die unerwartete Dualität des BMO-Raums mit dem Hardy-Raum H^1 aus. Die Nash-De Giorgi-Moser-Regularitätstheorie und die Nash-Ungleichung (zuerst von Stein bewiesen) sind die wichtigsten Werkzeuge bei der Untersuchung von probabilistischen Halbgruppen in verschiedensten Zusammenhängen, von euklidischen Räumen bis zu glatten Mannigfaltigkeiten und metrischen Räumen. Der Umkehrsatz von Nash-Moser ist ein leistungsstarkes Verfahren zur Lösung perturbativer partieller nichtlinearer Differentialgleichungen aller Art. Auch wenn der weitreichende Einfluss von Nash und Nirenberg auf das moderne Instrumentarium nichtlinearer partieller Differentialgleichungen hier nicht vollständig beschrieben werden kann, muss auch die Kohn-Nirenberg-Theorie der Pseudodifferentialoperatoren erwähnt werden.

Abgesehen davon, dass jeder für sich eine überragende Gestalt in der Analysis partieller Differentialgleichungen ist, haben Nash und Nirenberg sich im Wechselspiel ihrer Beiträge gegenseitig beeinflusst. Die Folgen ihres fruchtbaren Dialogs, den sie in den 1950er Jahren am Courant Institute of Mathematical Sciences begannen, sind heute stärker spürbar als je zuvor.