THE ABEL PRIZE 2015

L’académie des sciences et des lettres de norvège a décidé de décerner le prix Abel 2015 à **John F. Nash Jr.** de l’université de Princeton et à **Louis Nirenberg** de l’institut Courant de l’université de New York.

« pour leurs contributions fondamentales et absolument remarquables à la théorie des équations aux dérivées partielles non-linéaires et à ses applications à l’analyse géométrique. »

Les équations aux dérivées partielles sont utilisées pour décrire les lois fondamentales de phénomènes en physique, chimie, biologie et autres sciences. Elles servent également à analyser des objets géométriques comme cela a été démontré lors des dernières décennies par de nombreux succès dans cette direction.

John Nash et Louis Nirenberg ont joué un rôle déterminant dans le développement de cette théorie en résolvant des problèmes fondamentaux et en introduisant des idées profondes. Leurs avancées se sont développées pour donner naissance à des techniques polyvalentes et robustes qui sont devenues des outils essentiels au service de l’étude des équations aux dérivées partielles non-linéaires. Leur impact se fait sentir dans tous les domaines de la théorie allant des résultats fondamentaux d’existence jusqu’à l’étude qualitative de solutions, à la fois dans des contextes réguliers et non-réguliers. Leurs résultats sont également utiles pour l’analyse numérique des équations aux dérivées partielles.

Les théorèmes de plongement isométrique, montrant la possibilité de réaliser une géométrie intrinsèque en tant que sous-variété de l’espace euclidien, ont motivé certains de ces développements. Les théorèmes de plongement de Nash font partie des résultats les plus originaux du vingtième siècle dans le domaine de l’analyse géométrique. En prouvant que toute géométrie riemannienne peut être réalisée de manière lisse comme une sous-variété d’un espace euclidien, le théorème lisse (C^∞) de Nash établit l’équivalence du point de vue intrinsèque de Riemann avec l’approche extrinsèque plus ancienne. Le théorème de plongement de Nash non-lisse (variétés de classe C^1), amélioré par Kuiper, montre la possibilité de réaliser des plongements qui, à première vue, semblent être interdits par les invariants géométriques tels que la courbure de Gauss ; ce théorème est au cœur de toute la théorie de Gromov sur l’intégration convexe, et a également inspiré des avancées récentes spectaculaires dans la compréhension de la régularité de l’écoulement de fluides incompressibles. Grâce à ses théorèmes fondamentaux de plongement de la sphère S^2 dans R^3 avec prescription de la courbure de Gauss ou de la métrique riemannienne, Nirenberg a résolu les problèmes classiques de Minkowski et Weyl (ce dernier ayant également été traité simultanément par Pogorelov). Ces solutions étaient très importantes, à la fois parce que les problèmes étaient représentatifs d’un domaine en développement, et parce que les méthodes créées convenaient à des applications ultérieures.

Le travail de Nash sur la réalisation de variétés en tant que variétés algébriques réelles et le théorème de Newlander-Nirenberg sur les structures complexes illustrent également l'influence des deux lauréats dans le domaine de la géométrie.

Les problèmes de régularité sont une préoccupation quotidienne dans l'étude des équations aux dérivées partielles, parfois pour la réalisation de démonstrations rigoureuses et parfois pour les informations qualitatives précieuses qu'ils fournissent sur les solutions. Ce fut une avancée dans ce domaine lorsque Nash, en parallèle avec De Giorgi, démontra les premières estimations de Hölder pour des solutions d'équations elliptiques linéaires dans des dimensions générales sans hypothèses de régularité sur les coefficients ; entre autres conséquences, ceci a apporté une solution au 19ème problème d'Hilbert sur l'analyticité des minimiseurs de fonctionnelles intégrales analytiques elliptiques. Quelques années après ce travail de Nash, Nirenberg, en collaboration avec Agmon et Douglis, a établi des estimations de régularité innovantes pour des solutions d'équations elliptiques linéaires avec des données L^p, étendant ainsi la théorie classique de Schauder et qui sont extrêmement utiles dans les applications où de telles conditions d'intégrabilité sur les données sont disponibles. Ces travaux ont constitué le fondement de la théorie moderne de la régularité qui, depuis, a connu une croissance fulgurante avec des applications en analyse, en géométrie et en probabilité, y compris dans des contextes très irréguliers.

Les propriétés de symétrie fournissent également une information essentielle sur les solutions des équations différentielles non-linéaires, à la fois pour leur étude qualitative et pour la simplification des calculs numériques. Un des résultats les plus spectaculaires dans ce domaine a été obtenu par Nirenberg en collaboration avec Gidas et Ni : ils ont en effet montré que chaque solution positive d'une classe très générale d'équations elliptiques non-linéaires possède les mêmes symétries que celles des équations elles-mêmes.

Loin d'être confinés aux solutions des problèmes pour lesquels ils ont été conçus, les résultats démontrés par Nash et Nirenberg sont devenus des outils très utiles qui ont mené à des applications considérables dans d'autres contextes. Parmi les outils les plus populaires, on retrouve les inégalités d'interpolation dues à Nirenberg, y compris les inégalités de Gagliardo-Nirenberg et l'inégalité de John-Nirenberg. Cette dernière dit dans quelle mesure une fonction d'oscillation moyenne finie peut dévier de sa moyenne, et exprime la dualité inattendue de l'espace BMO avec l'espace Hardy H^1. La théorie de la régularité de Nash-De Giorgi-Moser et l'inégalité de Nash (d'abord démontrée par Stein) sont devenues des outils clés dans l'étude des semi-groupes probabilistes dans toutes sortes de situations allant des espaces euclidiens aux variétés différentielles et aux espaces métriques. Le théorème de la fonction inverse de Nash-Moser est une méthode puissante pour résoudre toutes sortes d'équations aux dérivées partielles non-linéaires perturbatives. Bien que l'impact très vaste d'aussi bien Nash que Nirenberg sur la boîte à outils moderne des équations aux dérivées partielles non-linéaires ne puisse pas être intégralement couvert ici, la théorie de Kohn-Nirenberg des opérateurs pseudo-différentiels doit également être mentionnée.

En plus d'être, à titre individuel, des personnalités imposantes dans l'analyse des équations aux dérivées partielles, Nash et Nirenberg se sont mutuellement influencés à travers leurs différentes contributions et interactions. Les conséquences du dialogue fructueux qu'ils ont commencé dans les années 1950 à l'institut Courant de l'université de New York, sont ressenties aujourd'hui plus fortement que jamais.