THE
ABEL
PRIZE
2015

L’Accademia norvegese di Scienze e Lettere
ha deciso di attribuire il Premio Abel per il 2015 a
John F. Nash Jr. dell’Università di Princeton e a **Louis Nirenberg**,
Courant Institute, Università di New York,

«per i loro contributi fondamentali e straordinari alla teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari e alle sue applicazioni all’analisi geometrica.»

Le equazioni differenziali alle derivate parziali sono utilizzate per descrivere le leggi fondamentali dei fenomeni della fisica, della chimica, della biologia e di altre scienze. Esse servono inoltre ad analizzare gli oggetti geometrici, come dimostrato dai numerosi successi negli ultimi decenni.

John Nash e Louis Niremberg hanno svolto un ruolo di primaria importanza nello sviluppo di questa teoria, risolvendo problemi fondamentali e introducendo idee profonde.

Le loro scoperte hanno favorito lo sviluppo di metodi potenti e versatili che sono diventati strumenti essenziali nello studio delle equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari. Esse hanno avuto anche una forte influenza su tutte le branche della teoria, dai fondamentali risultati di esistenza allo studio qualitativo delle soluzioni in contesti lisci e non lisci. I loro risultati hanno inoltre avuto implicazioni interessanti per l’analisi numerica delle equazioni differenziali alle derivate parziali.

I teoremi di immersione isometrica, che dimostrano la possibilità di realizzare una geometria intrinseca come sottovarietà dello spazio euclideo, hanno reso possibili alcuni di questi sviluppi. I teoremi di immersione di Nash sono tra i risultati più originali dell’analisi geometrica del Ventesimo secolo. Dimostrando che tutte le varietà riemanniane possono essere realizzate come sottovarietà dello spazio Euclideo, il teorema di Nash sulle immersioni lisce di classe (C^∞) stabilisce l’equivalenza tra il punto di vista intrinseco di Riemann e il vecchio approccio estrinseco. Il teorema di Nash sulle immersioni non lisce (varietà di classe C^1), migliorato da Kuiper, mostra la possibilità di realizzare immersioni che inizialmente sembravano essere impedite da invarianti geometrici come la curvatura di Gauss: questo teorema è alla base dell’intera teoria di Gromov sull’integrazione convessa, e ha anche ispirato recenti, spettacolari progressi nella comprensione della regolarità del flusso dei fluidi incompressibili. Nirenberg, grazie ai suoi teoremi fondamentali d’immersione della sfera S^2 in R^3, avendo prescritto la curvatura di Gauss o la metrica riemanniana, ha risolto i problemi classici di Minkowski e Weyl (quest’ultimo trattato contemporaneamente da Pogorelov). Queste soluzioni sono state importanti non solo perché i problemi erano rappresentativi di un’area di sviluppo, ma anche perché i metodi creati sono stati poi utilizzati per altre applicazioni.

Il lavoro di Nash sulla realizzazione di varietà in quanto varietà algebriche reali e il teorema di Newlander-

Nirenberg sulle strutture complesse illustrano ulteriormente l'influenza dei due matematici sulla geometria.

Le questioni relative alla regolarità sono all'ordine del giorno nello studio delle equazioni differenziali alle derivate parziali, a volte perché si è alla ricerca di dimostrazioni rigorose, altre volte perché offrono preziosi indicazioni qualitative riguardo alle soluzioni. Fu un avvenimento sensazionale quando Nash, contemporaneamente a De Giorgi, dimostrò le prime stime Hölderiane per le soluzioni delle equazioni lineari di tipo ellittico nelle dimensioni generali senza ipotesi di regolarità sui coefficienti: tra le altre cose, tale dimostrazione permise di risolvere il diciannovesimo problema di Hilbert riguardo all'analiticità dei minimi dei funzionali analitici integrali di tipo ellittico. Alcuni anni dopo la dimostrazione di Nash, Nirenberg, insieme ad Agmon e Douglis, elaborò diverse stime innovative sulla regolarità per le soluzioni di equazioni ellittiche lineari con dati L^p, che estendono la teoria classica di Schauder e sono estremamente utili nelle applicazioni dove sono disponibili tali condizioni di integrabilità sui dati. Questi lavori costituiscono la base della moderna teoria della regolarità che da allora è cresciuta immensamente, con applicazioni in analisi, geometria e probabilità, anche in situazioni molto irregolari, non lisce...

Le proprietà di simmetria ci forniscono anche informazioni essenziali sulle soluzioni delle equazioni differenziali non lineari per quanto riguarda il loro studio qualitativo e la semplificazione dei calcoli numerici. Uno dei risultati più spettacolari in questo campo è stato ottenuto da Nirenberg in collaborazione con Gidas e Ni: questi matematici hanno dimostrato che ogni soluzione positiva a una classe estesa di equazioni ellittiche non lineari presenterà le stesse simmetrie di quelle presenti nell'equazione.

Ben lontano dal rimanere confinati alle soluzioni dei problemi per i quali erano stati pensati, i risultati dimostrati da Nash e Nirenberg sono diventati strumenti molto utili e hanno trovato applicazioni straordinarie anche in altri contesti. Tra questi strumenti, i più famosi sono le disuguaglianze d'interpolazione di Nirenberg, comprese le disuguaglianze di Gagliardo-Nirenberg e la disuguaglianza di John-Nirenberg. Quest'ultima regola in quale misura una funzione con oscillazione media limitata possa deviare dalla sua media ed esprime la dualità inattesa tra lo spazio BMO e lo spazio di Hardy H^1. La teoria della regolarità di Nash-De Giorgi-Moser e la disuguaglianza di Nash (dimostrata per la prima volta da Stein) sono diventati strumenti fondamentali nello studio dei semigruppi probabilistici in tutti i tipi di domini, dagli spazi euclidei e dalle varietà differenziali fino agli spazi metrici. Il teorema della funzione inversa di Nash-Moser rappresenta un metodo perturbativo molto efficace per risolvere le equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari di tutti i tipi. Nonostante non sia questa la sede più idonea per illustrare l'impatto capillare dell'opera di Nash e Nirenberg sugli strumenti moderni delle equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari, va assolutamente ricordata anche la teoria degli operatori pseudodifferenziali di Kohn-Nirenberg.

Nash e Nirenberg, oltre ad aver dimostrato, a titolo individuale, capacità straordinarie nell'analisi delle equazioni differenziali a derivate parziali, si sono influenzati attraverso i vari contributi e le reciproche interazioni. Le conseguenze del loro dialogo fruttuoso, iniziato negli anni Cinquanta al Courant Institute of Mathematical Sciences, sono oggi più vive che mai.