THE
ABEL
PRIZE
2015

A Academia Norueguesa de Ciências e Letras decidiu atribuir o Prémio Abel de 2015 a **John F. Nash Jr.**, Universidade de Princeton, e **Louis Nirenberg**, Instituto Courant, Universidade de Nova Iorque,

«por contribuições extraordinárias e seminais para a teoria das equações diferenciais parciais não lineares e as suas aplicações na análise geométrica.»

As equações diferenciais parciais são usadas para descrever as leis básicas de fenómenos da Física, Química, Biologia e outras ciências. Também são úteis na análise de objetos geométricos, conforme demonstrado por numerosos êxitos nas últimas décadas.

John Nash e Louis Nirenberg desempenharam um papel de destaque no desenvolvimento desta teoria mediante a solução de problemas fundamentais e a introdução de ideias profundas. As suas descobertas deram origem a técnicas versáteis e robustas, as quais se tornaram ferramentas essenciais para o estudo das equações diferenciais parciais não lineares. Pode-se sentir o seu impacto em todos os ramos da teoria, desde os resultados fundamentais de existência até ao estudo qualitativo das soluções, tanto em domínios regulares como não regulares. Os seus resultados também são de interesse para a análise numérica de equações diferenciais parciais.

Mostrando a possibilidade de realizar uma geometria intrínseca como uma subvariedade do espaço euclidiano, os teoremas de imersão isométrica motivaram alguns destes avanços. Os teoremas de imersão de Nash figuram entre os resultados mais originais da análise geométrica do século XX. Ao provar que qualquer geometria Riemanniana pode ser realizada de maneira regular como uma subvariedade do espaço euclidiano, o teorema suave (C^∞) de Nash estabelece a equivalência do ponto de vista intrínseco de Riemann à abordagem extrínseca anterior. O teorema de imersão não suave (C^1) de Nash, aperfeiçoado por Kuiper, mostra a possibilidade de realizar imersões que, à primeira vista, parecem ser proibidas por invariantes geométricos, tais como a curvatura de Gauss. Este teorema está no cerne de toda a teoria de integração convexa de Gromov e também inspirou recentes avanços espetaculares na compreensão da regularidade do fluxo de um fluido incompressível. Com os seus teoremas fundamentais de imersão para a esfera S^2 em R^3, tendo prescrito a curvatura de Gauss ou a métrica Riemanniana, Nirenberg solucionou os problemas clássicos de Minkowski e Weyl (este último também foi tratado simultaneamente por Pogorelov). As referidas soluções foram importantes, tanto pelo fato de os problemas serem representativos de uma área em pleno desenvolvimento como pelo fato de os métodos criados serem os certos para muitas outras aplicações.

O trabalho de Nash com a realização de variedades como variedades algébricas reais e o teorema de

Newlander-Nirenberg sobre estruturas complexas são ainda outros exemplos da influência de ambos os laureados no âmbito da geometria.

As questões de regularidade são uma preocupação constante no estudo das equações diferenciais parciais, às vezes por causa das provas rigorosas e às vezes em função das valiosas descobertas qualitativas que oferecem sobre as soluções. Foi um grande salto neste campo quando Nash provou, paralelamente a De Giorgi, as primeiras estimativas de Hölder para soluções de equações lineares elípticas em dimensões gerais sem qualquer suposição de regularidade nos coeficientes, proporcionando, entre outras, uma solução ao 19.º problema de Hilbert sobre a analiticidade de minimizadores dos funcionais analíticos de integrais elípticas. Alguns anos depois da prova de Nash, Nirenberg, juntamente com Agmon e Douglis, estabeleceu diversas estimativas inovadoras de regularidade para as soluções de equações elípticas lineares com dados L^p, as quais alargam a teoria clássica de Schauder e são extremamente úteis nas aplicações em que tais condições de integrabilidade sobre os dados estejam disponíveis. Estes trabalhos fundaram a teoria moderna da regularidade, que desde então cresceu imensamente, incluindo aplicações nas áreas de análise, geometria e probabilidade, até em situações muito pouco regulares.

As propriedades de simetria também oferecem informação essencial sobre as soluções de equações diferenciais não lineares, tanto para o seu estudo qualitativo como para a simplificação dos cálculos numéricos. Um dos resultados mais espetaculares nesta área foi obtido por Nirenberg, em colaboração com Gidas e Ni. Eles mostraram que cada solução positiva para uma grande classe de equações elípticas não lineares exibirá as mesmas simetrias que as que estão presentes na própria equação.

Longe de serem restritos às soluções dos problemas para os quais foram concebidos, os resultados provados por Nash e Nirenberg tornaram-se ferramentas muito úteis e encontraram aplicações impressionantes em outros contextos. Entre as mais populares destas ferramentas estão as desigualdades de interpolação devidas a Nirenberg, incluindo as desigualdades de Gagliardo-Nirenberg e a desigualdade de John-Nirenberg. Esta última determina até que ponto uma função de oscilação média limitada pode desviar da sua média e exprime a dualidade inesperada entre o espaço BMO e o espaço Hardy H^1. A teoria da regularidade de Nash-De Giorgi-Moser e a desigualdade de Nash (primeiro provada por Stein) transformaram-se em ferramentas essenciais para o estudo de semigrupos probabilísticos em todos os tipos de domínios, desde os espaços euclidianos até às variedades suaves e espaços métricos. O teorema da função inversa de Nash-Moser é um método poderoso para resolver equações diferenciais parciais não lineares perturbativas de todos os tipos. Apesar de não ser possível tratar de maneira exaustiva aqui o amplo impacto de Nash e Nirenberg sobre a moderna caixa de ferramentas das equações diferenciais parciais não lineares, deve-se também fazer menção da teoria de operadores pseudodiferenciais de Kohn-Nirenberg.

Além de serem imponentes figuras individuais na área da análise de equações diferenciais parciais, Nash e Nirenberg influenciaram-se mutuamente por meio das suas contribuições e interações. As consequências do seu frutífero diálogo, o qual iniciaram na década de 1950 no Instituto Courant de Ciências Matemáticas, fazem-se sentir mais fortemente hoje do que nunca.