THE
ABEL
PRIZE
2015

Академия наук Норвегии решила присудить Абелевскую премию за 2015 Джону Ф. Нэшу младшему, Принстонский университет, и Луису Ниренбергу, Курантовский институт математических наук при Нью-Йоркском университете

За яркий и основополагающий вклад в развитие теории нелинейных дифференциальных уравнений и их применение к геометрическому анализу.

Дифференциальные уравнения в частных производных используются для описания основных закономерностей в физике, химии, биологии и других науках. Они также применяются при анализе геометрических объектов, о чем свидетельствуют многочисленные научные достижения последних десятилетий.

Джон Нэш и Луис Ниренберг сыграли ведущую роль в развитии этой теории, решив основные проблемы и внеся в теорию глубокие идеи. Их научные открытия привели к созданию универсальных и мощных теорий, ставших незаменимыми инструментами при изучении нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Их влияние ощущается во всех разделах теории, от фундаментальных теорем существования до качественной теории уравнений, как в гладком, так и в негладком случаях. Их результаты также применяются для численного анализа дифференциальных уравнений в частых производных.

Теоремы изометрического вложения, показывающие возможность реализации внутренней геометрии как подмногообразия Евклидова пространства, дали импульс некоторым из этих направлений. Теоремы вложения Нэша стоят в ряду самых оригинальных результатов геометрического анализа двадцатого века. Доказав, что любая Риманова геометрия может быть гладко реализована как подмногообразие Евклидова пространства, гладкая теорема Нэша (C^∞) устанавливает эквивалентность внутренней точки зрения Римана с ранее существовавшими внешними подходами. Не гладкая теорема вложения Нэша (C^1) , далее развития Койпером, демонстрирует возможность вложений, которые, на первый взгляд, противоречат таким геометрическим инвариантам, как, например , Гауссова кривизна. Эта теорема легла в основу всей теории выпуклого интегрирования Громова, а также стимулировала недавние впечатляющие успехи в понимании регулярности потока несжимаемой жидкости. Ниренберг с его фундаментальными теоремами вложения сферы S^2 в R^3, при заданной Гауссовой кривизне или Римановой метрике, решил классические задачи Минковского и Вейля (последняя решена одновременно и независимо Погореловым). Эти решения были важны и потому, что проблемы были характерны для развивающейся области науки, и потому, что разработанные методы пригодились для дальнейших приложений.

Работа Нэша по реализации многообразий как вещественных алгебраических многообразий, и теорема Ньюландера-Ниренберга о комплексных структурах еще раз иллюстрируют влияние обоих лауреатов в геометрии.

Вопросы регулярности постоянно возникают в дифференциальных уравнениях с частными производными, иногда для достижения строгости доказательств, а иногда ввиду бесценной качественной информации о решениях, которую они содержат. Когда Нэш доказал, одновременно с Де Джорджи, первые оценки Гельдера для решений линейных эллиптических уравнений в общих размерностях без предположения регулярности коэффициентов - это был настоящий прорыв.

Наряду с прочими результатами, это привело к решению 19- й проблемы Гильберта об аналитичности минимизаторов аналитических эллиптических интегральных функционалов. Спустя несколько лет после доказательства Нэша, Ниренберг, вместе с Агмоном и Дуглисом, нашел несколько новых оценок регулярности решений линейных эллиптических уравнений с L^p - условиями, которые обобщают теорию Шаудера и чрезвычайно полезны в задачах, в которых такие условия интегрируемости выполнены. Эти работы заложили основу современной теории регулярности, которая с тех пор получила бурное развитие и нашла применение в анализе, геометрии и теории вероятностей, даже в не гладких ситуациях.

Свойства симметрий также содержат важную информацию о решениях нелинейных дифференциальных уравнений, как для их качественного исследования, так и для упрощения численных расчетов. Один из самых замечательных результатов в этом направлении был получен Ниренбергом в сотрудничестве с Гидасом и Ни: они показали, что каждое положительное решение большого класса нелинейных эллиптических уравнений имеет те же симметрии, что и сами уравнения.

Результаты Нэша и Ниренберга нашли широкое применение не только в решении задач, для которых они были разработаны, но стали полезными инструментами и в других контекстах. Наиболее известные из них: интерполяционные неравенства Ниренберга, в том числе неравенства Гальярдо-Ниренберга и неравенство Джона-Ниренберга. Последнее неравенство определяет, насколько функция ограниченных средних колебаний может отклоняться от своей средней величины и выражает неожиданную двойственность пространства ограниченных средних колебаний и пространства ХардиH^1. Теория регулярности Нэша-Де Джорджи-Мозера и неравенство Нэша (впервые доказанное Стайном) стали основными инструментами в изучении вероятностных полугрупп в различных ситуациях, от Евклидовых пространств до гладких многообразий и метрических пространств. Теорема об обратной функции Нэша-Мозера является мощным методом решения возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений различных типов.

Хотя мы не можем здесь дать полное описание влияния Нэша и Ниренберга на современный арсенал теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, теорию псевдодифференциальных операторов Кона-Ниренберга необходимо все же упомянуть.

Будучи оба выдающимися учеными в области анализа дифференциальных уравнений в частных производных, Нэш и Ниренберг влияли друг на друга своими работами и научным общением. Результаты этого плодотворного диалога, который они начали в 1950- х в Курантовском Институте Математических наук, сегодня заметны отчетливее, чем когда-либо прежде.