NIELS HENRIK ABEL

FR. LANGE-NIELSEN

De ytre omrids av Abels liv tör være vel kjent. Men da enkelte Abel-biografier og de fleste oppslagverker gir et nokså fortegnet billede av hans liv og skjebne, kan det være på sin plass å gi en oversikt over hans levnetslöp som en innledning til en omtale av hans videnskapelige innsats.

Niels Henrik Abel ble födt 5. august 1802, og han döde 6. april 1829 seksogtyve år og otte måneder gammel. Han tilhörte en embetsslekt, hans far og farfar var prester og hans oldefar var rådmann i Bergen. Hans mor var en kjöbmannsdatter fra Risör. I hans förste barndom var forholdene i hjemmet lyse, og ökonomien var god. Hans morfar var på den tid en rik mann, som bl. a. skjenket hele 2000 spesiedaler til Norges universitet ved dets opprettelse i 1811. Under de forvirrede ökonomiske forhold i årene efter 1814 mistet Abels morfar hele sin formue, og samtidig ble også hans foreldres ökonomiske stilling av mange årsaker meget bekymringsfull. Abels far var en begavet mann, som hadde en meget god teologisk embetseksamen fra universitetet i Köbenhavn. Han ble ridder av Dannebrog for sine fortjenester av kystforsvaret i sitt prestegjeld i 1801. Han ble valgt til stortingsmann både i 1814 og i 1818. Men han var ingen sterk karakter, og i hans siste leveår var forholdene i hjemmet ulykkelige. Abels mor skildres som »helt karakterlös« og drikkfeldig og også hans far lå i sine siste år under for den samme svakhet. Faren döde i 1820 og efterlot enke og seks barn i stor fattigdom. Niels Henrik var familiens eneste håp, og de store byrder som hans sörgelige familieforhold la på ham både ökonomisk og på annen måte, var den vesentligste årsak til de vanskeligheter han mötte i sitt liv.

Hösten 1815 kom Abel inn på Christiania Katedralskole. Skolen disponerte adskillige legater, og Abel hadde i hele sin skoletid friplass og stipendier. Fra begynnelsen av 1818 fikk skolen en ny matematikklærer, den senere professor Bernt Holmboe. Abel hadde også tidligere klart seg fint i matematikk, men under Holmboes vekkende undervisning tok hans utvikling som matematiker straks en meget sterk fart, og Holmboe har innlagt seg uvisnelig fortjeneste ved sin veiledning av Abel. Han ga ham privatundervisning og gjennomgikk bl. a. en rekke av Eulers verker med ham, og han lot ham også ellers lese de store klassikere. Når Felix Klein sier: »Abel war völlig Autodidakt« (Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Berlin 1926, s. 101), så forekommer uttalelsen meg ikke helt treffende, og dette gjelder enda mer Kleins uttalelse om »die wenigen ihm zugänglichen Bücher«. Det norske universitetsbibliotek var i virkeligheten forbausende godt forsynt med matematisk litteratur, og Katedralskolens og universitetsbibliotekets utlånsprotokoller viser at Abel både i sine siste skoleår (1818–21) og under sin studietid ved universitetet (1821–25) lånte en imponerende mengde matematiske verker. Da han i 1825 drog ut på sin store utenlandsreise, hadde han gjennom iherdige studier ervervet seg et grundig kjennskap til sin samtids matematiske viden. Men det er riktig at de elementære forelesninger som den gang ble holdt ved Christiania universitet, ikke kunne gi Abel noe som helst, da han alt fra skoledagene hadde kunnskaper som gikk meget videre.

Mellom Abel og hans lærer Holmboe utviklet det seg snart et varmt personlig vennskap som aldri kjölnet, og som ble et av de viktigste stöttepunkter i Abels liv. Men det var også andre som stöttet ham. Holmboe ble aldri trett av å forkynne hvilket matematisk geni hans unge elev var, og i de små forhold i Christiania den gang forplantet Abels ry som matematiker seg også til Universitetets lærere allerede för han var ferdig med skolen. Vi har en uttalelse fra denne tid fra professor Chr. Hansteen, hvor denne omtaler Abel som et stort geni og sier at man vil skaffe ham ökonomisk stötte når han blir student, og man »venter da engang i ham at see en af Jordens förste Mathematici«. Hansteen var professor i anvendt matematikk og hadde en innflytelsesrik stilling ved Universitetet. Han ble en av Abels virksomste velyndere.

Det er sikkert ikke mange universiteter som har mottatt en ung student med så stor varme og velvilje som det unge og fattige norske universitet mötte Abel med, da han i 1821 hadde tatt sin studentereksamen. Han fikk straks en plass på Regensen, en universitetsstiftelse for fattige studenter. For å sikre at han skulle kunne vie seg til studiene, skjöt universitetets lærere sammen til en månedlig understöttelse til ham. De åpnet også sine hjem for ham. I 1823 forærte professoren i matematikk, Rasmusen, Abel 100 spesiedaler til en reise til København for at han kunne gjöre bekjentskap med danske matematikere. I januar 1824 foreslår universitetet at staten skal bevilge Abel et reisestipendium til utlandet og en fast understöttelse hjemme inntil han kan tiltre reisen. Finansdepartementet og Kirkedepartementet mente imidlertid at Abel var så ung at han fremdeles burde bli hjemme et par år for ved universitetet å utdanne seg videre »i de Sprog og andre Bividenskaber, som det er troligt at han i hans endnu havende unge Alder ikke besidder i den Grad som det kunde ansees önskeligt for at han med fuld Nytte for sin Hovedvidenskab skulde kunne anvende det paatænkte Ophold ved fremmede Universiteter«, og de bevilget ham derfor i mars 1824 et hjemmestipendium på 200 spd. årlig i inntil to år. At Abels utenlandsreise ble utsatt på grunn av de nevnte departementers holdning har senere vært kritisert fra enkelte hold, men kritikken er neppe berettiget. Med den stötte han nu hadde fått kunne han arbeide uforstyrret videre, og den tiden han ennu ble hjemme har hatt stor betydning for hans utvikling som matematiker. Han offentliggjorde sine förste arbeider i »Magazin for Naturvidenskaberne«, som ble redigert av Hansteen.

I august 1825 ble hans fornyede ansökning om reisestipendium innvilget. Han fikk 600 spd. årlig i to år, en for den tid ganske stor sum. Dessverre måtte han av denne bevilgning efterlate noen penger til sine brödre, för han i september 1825 drog ut på sin store reise. Han oppholdt seg i Berlin til våren 1826, fulgte så sine norske venner på en nokså kostbar reise over Österrike, Nord-Italia og Schweiz, var i Paris fra juli til desember 1826 og atter i Berlin fra januar til mai 1827, da han vendte tilbake til Christiania. Allerede under sitt förste opphold i Berlin vant han en trofast venn i geheimeråd Crelle, som i 1826 startet det berömte tidsskrift »Journal für die reine und angewandte Mathematik«, til hvilket han straks knyttet Abel som medarbeider. Det meste av Abels senere produksjon ble trykt i dette tidsskrift.

Mens Abel var i utlandet inntraff allerede hösten 1825 en begivenhet, som senere har gitt anledning til sterk kritikk mot universitetet. Dette innstillet nemlig Abels lærer Holmboe til stillingen som lektor i matematikk efter professor Rasmusen som hadde sökt avskjed. Holmboe ble også utnevnt og dermed var universitetets eneste faste lærerstilling i ren matematikk beslaglagt. Fakultetet er i denne forbindelse naturligvis fullt oppmerksom på Abel. Det mener imidlertid at Holmboe vil passe bedre til denne stilling hvor det vesentlig skal undervises i elementær matematikk, men fakultetet erklærer samtidig at Abel er »fortrinlig skikket til at beklæde en Lærerpost i den höiere Mathematik, som man maaske turde gjöre sig Haab om med Tiden at see oprettet ved Universitetet«. Fakultetets uttalelse slutter med å fremheve »hvor vigtigt det vil være, saavel for Videnskaberne i Almindelighed, som for vort Universitet i Særdeleshed, at ei Student Abel tabes af Sigte«. Universitetet la adskillig vekt på at den nye lektor måtte kunne overta undervisningen allerede i januar 1826, og at man ikke uten skade for Abels arbeide kunne avbryte hans utenlandsreise. Det har senere vært innvendt mot dette at Abel kunne ha vært utnevnt, og så kunne Holmboe ha vikariert for ham. Det er ikke naturlig å forlange at fakultetet skulle resonnere slik. Abel var bare 23 år, og han var nettopp sendt ut med et reisestipendium. Det var derfor uvisst når Abel i tilfelle kunne ha overtatt stillingen, og universitetet var så beskjedent utstyrt med lærerkrefter, at det ble ansett nödvendig å få den nye mann straks. Fakultetet hadde den gang ingen grunn til å anta at den stilling det her gjaldt, skulle bli Abels vesentligste chanse. Det er heller ingen ting som tyder på at Abel selv skulle ha fölt universitetets avgjörelse som noe skjebneslag.

En mere berettiget kritikk har vært rettet mot myndighetenes holdning overfor Abel, da han i mai 1827 kom hjem fra sin reise. Reisestipendiet var da forlengst oppbrukt, bl. a. fordi Abel også hadde måttet stötte sine brödre. Reisen hadde dessuten falt dyrere enn beregnet, hvilket delvis skyldtes en overflödig kostbar reiserute, og delvis at Abel neppe var noen fremragende ökonom. Den siste tiden i Berlin hadde han levet på lån fra Holmboe.

Ved hjemkomsten anbefalte universitetet straks en ny bevilgning til ham. Finansdepartementet svarte imidlertid helt avvisende. Denne beklagelige holdning kan delvis forklares ved at reisestipendiet var ment å dekke tiden helt til september 1827. Abel sendte da inn en ny ansökning, som igjen ble varmt anbefalt av universitetet, og under sakens videre behandling pekte universitetet på at det bare gjaldt å skaffe Abel understöttelse i en kortere tid, da han snart ville kunne påregne å få en stilling som vikar for professor Hansteen, og resultatet ble at det i begynnelsen av september 1827 ble bevilget Abel 200 spd. for året 1. juli 1827—1. juli 1828. Departementet hadde ment at bevilgningen skulle være forskudd på senere lönn, men universitetet satte seg ut over dette og bevilget Abel belöpet som et nytt stipendium.

I oktober 1827 fikk Abel mot kausjon av Holmboe og Hansteen et banklån på 200 spd. (som kausjonistene senere måtte betale mesteparten av). Fra 1. januar 1828 ble Abel vikar for Hansteen ved den militære höiskole, og i februar ble han — fremdeles som vikar for Hansteen — konstituert som dosent ved universitetet med en lönn på 400 spd. årlig, fra 1. januar 1829 hevet til 600 spd. Disse ansettelser ga ham efter tidens og landets forhold et rimelig levebröd, men han var kommet meget forgjeldet hjem fra utlandet, og han måtte stadig stötte sin familie, så hans ökonomiske stilling var fremdeles vanskelig.

Sommeren 1828 syntes det å åpne seg en mulighet for at Abel kunne få en stilling i Berlin. På grunn av visse forhindringer i Berlin kunne denne plan ikke gjennomföres på dette tidspunkt. Det vidner unektelig om små og fattige forhold at den nevnte plan ikke beveget Universitet og myndighetene til å sette noe inn på å skaffe Abel en varig stilling hjemme.

Selv om det kan reises berettiget kritikk mot hjemlandets behandling av Abel efter hjemkomsten fra utlandet, så må det dog fremheves at denne kritikk ofte har vært urimelig overdrevet og i dårlig overensstemmelse med de faktiske forhold. Tross alt skaffet Universitetet og hans venner også i denne tid ham dog såvidt gode ökonomiske vilkår at hans videnskapelige arbeide ikke ble hemmet. Han utfoldet i virkeligheten en helt fabelaktig produktivitet fra han kom hjem og til han i januar 1829 ble liggende syk av tuberkulose på Froland hovedgård, en av Norges få herregårder. Han döde ikke i elendighet som det har vært påstått, men i et av Norges rikeste hjem hvor han nöd den kjærligste pleie. To dager efter Abels död skriver hans venn Crelle fra Berlin at kallelsen til Berlins universitet var endelig iorden. Han ville der ha kommet i ganske anderledes gunstige forhold hva videnskapelig miljö angikk. Men ökonomisk ville det neppe ha vært noen forbedring, for lönnen var satt til 600 Thaler, og med den lönn ville Abel ikke ha fått det rummeligere i Berlin, enn han nu ville ha hatt det hjemme om han hadde fått leve.

*

Skjönt Abel har gjort en banebrytende innsats på mange områder av matematikken har *Sylow* [2] sikkert rett i at han först og fremst var algebraiker, og han har også selv sagt at ligningsteorien var hans yndlingsstudium. Hans interesse for denne teori skriver seg helt fra skoledagene. Atten år gammel skrev han en nu tapt avhandling hvor han mente å ha funnet en algebraisk lösning av den alminnelige 5tegradsligning. De norske matematikere har vel neppe fölt seg kompetente til å bedömme avhandlingen, og Hansteen sendte den da til professor Degen i Köbenhavn med anmodning om at han ville fremlegge den for Det kongelige Videnskabsselskab. I et brev av mai 1821 skriver Degen at han gjerne vil fremlegge avhandlingen, men at han först vil ha metoden anvendt på et numerisk eksempel. Abel hadde da imidlertid selv funnet feilen i sitt resonnement. Degen skriver videre i det nevnte brev: »Neppe kan jeg ved denne Anledning undertrykke det Önske, at den Tid og de Aandskræfter, et Hoved som Hr. A. skjænker en i mine Öine noget steril Gjenstand, maatte ydes et Emne, hvis Uddannelse vil have de vigtigste Fölger for hele Analysen og dens Anvendelse paa dynamiske Undersögelser, jeg mener de *elliptiske Transcendenter*. Ved tilbörligt Anlæg for Undersögelser af dette Slags vil den alvorlige Gransker ingenlunde blive staaende ved disse ellers i og for sig selv höyst mærkværdige Functioners mange og smukke Egenskaber, men opdage maghellanske Gjennemfarter til store Partier af eet og samme uhyre analytiske Ocean«. Det siste var en i sannhet vellykket og imponerende profeti, som har bevart Degens navn i matematikkens historie. Men det förste råd om å forlate den »sterile gjenstand« fulgte Abel heldigvis ikke. Han var nu blitt overbevist om at en algebraisk lösning av ligninger av femte og höyere grad i alminnelighet ikke var mulig, og han satte seg det mål å bevise umuligheten. Han nådde dette mål og offentliggjorde sitt bevis i 1824 i en liten avhandling skrevet på fransk og trykt på hans egen bekostning i Christiania. For å spare penger hadde han redigert avhandlingen så knapt at den ikke var lett å forstå. Han offentliggjorde derfor senere i Berlin en utförligere redaksjon i 1. bind av Crelles Journal (1826), men tankegangen var helt den samme. Ved en algebraisk lösning (en lösning »ved rottegn« som vi kort sier) menes som bekjent en lösning ved hvilken ligningens rötter uttrykkes ved ligningens koefficienter ved hjelp av de fire förste regningsarter og rotutdragning. Abel gjennomförer först den enklere oppgave å bestemme den alminnelige form for et slikt rotuttrykk, og viser så, hva der er betydelig vanskeligere, at ingen slik form kan tilfredsstille en alminnelig ligning av 5. eller höyere grad. Han benytter herunder bl. a. en ny setning av Cauchy om det antall verdier en rasjonal funksjon av n störrelser kan anta ved permutasjon av disse störrelser. Ved dette arbeide var Abel trådt inn i rekken av de store matematikere, men det tok dessverre adskillig tid för det ble erkjent.

Skjönt det bryter den kronologiske fremstilling er det mest hensiktsmessig å nevne Abels senere rent algebraiske arbeider her. I alminnelighet kunne ligninger av höyere grad altså ikke löses ved rottegn. Men for spesielle ligninger var dette mulig, og Abel stillet seg som neste mål å bestemme hvilke klasser av ligninger som var algebraisk löselige. Dette emne kom han stadig tilbake til hele resten av sitt liv. I sine arbeider om elliptiske funksjoner (hvorom senere) fant han en mengde eksempler på slike ligninger. Han fikk bare offentliggjort ett större rent ligningsteoretisk arbeide, nemlig den berömte avhandling om den klasse algebraisk löselige ligninger, som eftertiden har gitt navnet de Abelske ligninger. Denne avhandling ble sendt til Crelle i mars 1828, men ble först trykt et år senere, noen dager för Abels död. Den algebraiske löselighet beror her på visse rasjonale forbindelser mellom ligningsröttene. I Abels efterlatte papirer fantes videre et likeså berömt bruddstykke av en större avhandling »Sur la résolution algébrique des équations«, som selv i denne ufullendte form inneholder fundamentale resultater. Fra et historisk synspunkt er det av interesse at man her i forbindelse med Abels innförelse av et vilkårlig rasjonalitetsområde har ment å finne de förste spirer til begreper som tallegeme og dermed beslektede begrepsdannelser. (jfr. Bell [9] s. 214).

Abel står i disse arbeider som den nærmeste og mest direkte forlöper for Galois. Det er foruten hele tankegangen i den ovenfor nevnte avhandling om de Abelske ligninger særlig Abels nye og fruktbare definisjon av en lignings irreduktibilitet og hans anvendelse av den störrelse som senere er blitt kalt Galois' resolvent, som har hatt betydning for Galois' arbeider (jfr. Sylow [2]). Det er på det rene at Galois har studert Abel, som er en af de få forfattere som han citerer. Men Galois nådde gjennom det gruppeteoretiske synspunkt som det lykkedes ham å gjennomföre, ennu langt videre enn Abel, og det er intet som tyder på at Abel har sett ligningsteorien fra et så höyt liggende utsiktspunkt som Galois.

Tiden fra Abel i 1824, 21 år gammel, gjennomförte sitt umulighetsbevis og til 1832, da Galois döde 20 år gammel, er en helt enestående periode når det gjelder ligningsteoriens utvikling. I disse otte år gjorde denne teori större fremskridt enn i alle tidligere århundreder, og også större enn i tiden fra 1832 og til idag.

Det bör fremheves at det ikke er bare gjennom de arbeider som er nevnt ovenfor, at Abels algebraiske interesser kommer til syne. Hans algebraiske synspunkter og metoder spiller en vesentlig rolle også i flere av hans viktigste arbeider fra andre områder enn ligningsteorien, særlig da i beviset for det store Abelske teorem og i hans undersökelser over de elliptiske funksjoner.

De arbeider Abel hadde offentliggjort för umulighetsbeviset av 1824, ble lenge ansett for å være mindre betydelige. Förste trekvart århundrede senere ble man oppmerksom på at et av dem var endog meget betydelig. Det var en avhandling som var blitt trykt på norsk i »Magazin for Naturvidenskaberne« i 1823. Den viktigste del av denne avhandling ble trykt opp igjen på tysk i 1. bind av Crelles Journal. Abel löser her en integralligning, og det var först gjennom Fredholms og Volterras oppdagelser omkring år 1900, at betydningen av Abels arbeide ble klar. Ikke så å forstå at Abel hadde utviklet den moderne teori for integralligninger. Men som et eksempel på eftertidens dom kan nevnes at den amerikanske matematikkhistoriker E. T. Bell sier [9] s. 524—25: »It is customary to attribute the origin of integral equations as a distinct department of analysis to Abel's solution« .... »no analyst before Abel recognized that integral equations presented a basically novel problem in analysis.« Abel rakk imidlertid ikke å ta opp dette emne igjen.

*

En meget stor del av Abels produksjon gjelder integralregningen, dette uttrykk tatt i en nokså omfattende betydning. Det dreier seg særlig om tre grupper av problemer:

1) Å bestemme for hvilke funksjoner $f(x)$ integralet $\int f(x)dx$ kan uttrykkes i endelig form ved hjelp av visse klasser av funksjoner, nemlig ved rasjonale, eksplisitt algebraiske, eksponentielle og logaritmiske funksjoner (herunder kombinasjoner av et endelig antall av de operasjoner som karakteriserer de nevnte funksjonsklasser). Disse funksjoner betegnes som elementære funksjoner.
2) Å finne relasjoner mellom summer av bestemte integraler av samme form, idet man undersöker hvilken forbindelse som må finne sted mellom integralenes grenser for at de nevnte relasjoner skal bestå.
3) Integralenes omvendingsproblem d. v. s. å studere $x = \varphi(u)$ når $u = \int_a^x f(t)dt$. Istedenfor å betrakte det bestemte integral som en funksjon av integralets övre grense skal man altså betrakte integralets övre grense som en funksjon av integralets verdi og klarlegge denne funksjonssammenheng. (Dette problem kan vel snarere sies å tilhöre funksjonsteorien enn integralregningen).

De to förste problemgrupper hadde matematikerne tatt fatt på allerede på 1600-tallet i differensial- og integralregningens förste tid. Omvendingsproblemet derimot ble först fremlagt av Abel. För ham var det ikke andre enn Gauss som for alvor hadde gitt seg i kast med det, og Gauss hadde intet offentliggjort om disse undersökelser.

Abel erkjente i höyere grad enn noen tidligere matematiker, at det fantes dyptgående forbindelser mellom disse tre problemgrupper, og denne erkjennelse var av vesentlig betydning for de store oppdagelser han her gjorde. Han innså at disse problemer grep inn i hverandre, slik at undersökelser på et av disse områder kunne finne stötte i resultater fra et annet. Han förte derfor disse undersökelser frem samtidig, hvilket særlig kommer til uttrykk i det siste store, men dessverre ufullförte, arbeide han fikk offentliggjort »Précis d'une théorie des fonctions elliptiques«, trykt kort tid efter hans död.

Hva det förste problem angår, så hadde man lenge för Abels tid nådd så langt at man kunne integrere de funksjonsklasser hvis integraler alltid lar seg uttrykke ved elementære funksjoner. Man var også klar over at integraler av algebraiske funksjoner i alminnelighet ikke kunne uttrykkes på denne måte. Dette var dog mulig under spesielle betingelser. Abel stillet seg da som mål å bestemme hvilke betingelser som måtte være oppfylt for at integrasjonen av algebraiske differensialer skulle kunne utföres ved elementære funksjoner, og det er typisk for ham at han foresatte seg å bestemme alle disse tilfeller. Selv om han ikke kunne gjennomföre hele dette program, så nådde han dog vesentlige resultater. Efter bestemte uttalelser i det nettopp nevnte siste arbeide har han dessuten på dette felt sittet inne med meget, som han ikke fikk offentliggjort, og som dessverre heller ikke hans efterlatte papirer gir noen meddelelse om.

Innenfor problemgruppe 2) forelå det för Abels tid et fundamentalt resultat, nemlig de elliptiske integralers addisjonsteorem, som var oppdaget av Euler. Ved et elliptisk integral forståes et integral av formen $\int R\left(x, \sqrt{f(x)}\right)dx$, hvor R er en rasjonal funksjon og $f(x)$ et polynom i x av 3. eller 4. grad. Navnet er en historisk tilfeldighet, det skriver seg fra at ellipsens buelengde uttrykkes ved et slikt integral. Et elliptisk integral kan i alminnelighet ikke uttrykkes ved elementære funksjoner. Matematikerne stillet seg da den oppgave å undersöke om grensene i to bestemte elliptiske integraler av samme form kunne fikseres slik at summen (eller differansen) av de to integraler fikk et elementært uttrykk. Efter at en rekke forskere hadde arbeidet med slike og lignende problemer kom Euler frem til sitt addisjonsteorem, som kan skrives på fölgende form:

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

hvor

$$z = \frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}+y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}.$$

Resultatet er altså at summen av to elliptiske integraler av samme form kan uttrykkes ved bare ett integral, hvis det siste integrals grense avhenger algebraisk som ovenfor angitt, av de to förste integralers grenser. Herav fölger videre at summen av et vilkårlig antall slike integraler er lik et eneste integral hvis grense kan uttrykkes algebraisk ved grensene for integralene i summen. (Alle elliptiske integraler kan ved variabeltransformasjoner overföres til tre normalformer. I alle tre har kvadratroten den form som ovenfor er brukt. Ovenfor er gjengitt addisjonsteoremet for de såkalte integraler av förste slags. Euler fant også tilsvarende addisjonsteoremer for elliptiske integraler av annen og tredje slags).

Den oppdagelse som av mange regnes som Abels ypperste, det store Abelske teorem som det ofte kalles, er en meget vidtgående generalisasjon av Eulers addisjonsteorem. Også Abel behandler her integraler av formen $\int R(x, y)dx$ hvor R er en rasjonal funksjon av x og y, men istedenfor som Euler å gå ut fra at y er bestemt ved ligningen $y^2 = f(x)$ hvor f er et polynom i x av 3. eller 4. grad, lar Abel y være definert ved en alminnelig algebraisk ligning $F(x, y) = 0$, som er av $n$te grad i y og hvor koeffisientene for de forskjellige potenser av y er hele rasjonale funksjoner av x. Når y er bestemt på denne måte har man senere kalt integralet $\int R(x, y)dx$ for et Abelsk integral. Det Abelske teorem sier da, kort gjengitt, at integralgrensene kan bestemmes slik at en sum av Abelske integraler kan uttrykkes ved elementære funksjoner nærmere bestemt ved algebraisk-logaritmiske funksjoner.

$$\int^{x_1} R(x, y)dx + \ldots + \int^{x_r} R(x, y)dx + \int^{x_{r+1}} R(x, y)dx + \ldots + \int^{x_{r+\mu}} R(x, y)dx =$$

algebr.-logaritmisk funksjon av grensene $x_1, x_2, \ldots x_{r+\mu}$.

De nedre grenser betraktes som konstanter og angis ikke her. De övre grenser $x_1, \ldots, x_{r+\mu}$ tilfredsstiller visse algebraiske relasjoner. Abel stiller videre det spörsmål hvor mange av disse övre grenser som er bestemt ved de övrige, og kommer til det overmåde viktige resultat at dette tall ikke avhenger av antall integraler i summen, men bare av ligningen $F(x, y) = 0$. Dette minste antall avhengige integraler er ovenfor betegnet med μ, og vi kan da skrive

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=r} \int^{x_\nu} R(x, y)dx = -\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} \int^{x_{r+\nu}} R(x, y)dx +$$

algebr.-logaritm. funksjon av $(x_1, x_2, \ldots, x_{r+\mu})$.

Tallet μ avhenger altså ikke av r, som kan velges vilkårlig, slik at summen av et hvilketsomhelst antall integraler kan uttrykkes ved summen av et bestemt antall integraler + elementære funksjoner. For de elliptiske integraler er efter Eulers addisjonsteorem $\mu = 1$. Tallet μ har man senere kalt integralets slekt eller også den slekt som karakteriserer kurven $F(x, y) = 0$. Dette slektsbegrep har vist seg å være av fundamental betydning i de algebraiske funksjoners teori.

Det Abelske teorem er av overmåde stor rekkevidde. Jacobi karakteriserer det i 1832 i fölgende ord: »Wir halten es, wie es in einfacher Gestalt ohne Apparat von Calcul den tiefsten und umfassendsten mathematischen Gedanken ausspricht, für die grösste mathematische Eintdeckung unserer Zeit, obgleich erst eine künftige, vielleicht späte, grosse Arbeit ihre ganze Bedeutung aufweisen kann.«

Og Mittag-Leffler skriver i sin Abelbiografi [6], [7] at det Abelske teorem fremdeles, hundrede år efter Abels födsel, betegner höydepunktet i matematikkens utvikling.

Det fremgår av Abels efterlatte papirer at han har funnet sitt store teorem i studietiden i Christiania för utenlandsreisen. Også hovedlinjen i beviset, som er av rent algebraisk natur, foreligger i hans opptegnelser fra denne tid. Han arbeidet videre med disse problemer under sin reise, og straks efter ankomsten til Paris i juli 1826 tar han fatt på redaksjonen av en stor avhandling, som han ville forelegge for Académie des Sciences (Institut de France), og som skulle gi en inngående fremstilling både av addisjonsteoremet i sin generelle form og av en rekke spesialtilfeller som skulle vise dets slagkraft overfor de klasser av algebraiske funksjoner som matematikerne hittil hadde beskjeftiget seg med. Abel la meget arbeide på denne avhandling, og vi har flere vidnesbyrd om at han selv var fornöyet med resultatet. Han viste personlig avhandlingen til Cauchy, »men han vilde neppe kaste Öjnene paa den. Og jeg tör uden Bram sige at den er god. Jeg er nysgjerrig efter at höre Institutets Dom« (brev til Holmboe av 24. oktober 1826). Avhandlingen ble også fremlagt for Akademiet den 30. oktober 1826 og Legendre og Cauchy ble oppnevnt til å bedömme den.

Når Abel nu hadde fått fremlagt denne avhandling for datidens mest höytstående videnskapelige forum, så kunne han håpe at han derved skulle vinne en seier av avgjörende betydning for sin fremtid. Han hadde iallfall gode grunner til å tro og håpe det. Det er neppe noen annen avhandling i matematikkens historie som av eftertiden har vært i den grad overhopet med superlativer som denne Abels Pariser-avhandling. Et par eksempler: »eine der grossartigsten mathematischen Abhandlungen, die je geschrieben wurden« (Krazer [15]). »Il n'y a peut-être pas, dans l'histoire de la Science, de proposition aussi importante obtenue à l'aide de considérations aussi simples.« (Picard [16] s. 437).

Men det gikk ikke som han ventet. Istedenfor en seier kom denne avhandling på grunn av en rekke sörgelige tilfeldigheter til å betegne Abels störste og smerteligste nederlag. Cauchy var opptatt med sine egne epokegjörende arbeider, og Abels avhandling ble liggende ulest. I de siste dager av desember 1826 måtte Abel forlate Paris uten å ha hört et ord om sin store avhandling. Efter et nytt opphold i Berlin kom han i mai 1827 hjem til Norge (jfr. foran).

Abel rettet aldri noen direkte henvendelse til Akademiet i Paris for å få rede på hva det var blitt gjort med hans avhandling, men hösten 1828 sendte han til Crelles Journal en avhandling som behandlet et viktig spesialtilfelle av det Abelske teorem, nemlig det såkalte hyperelliptiske tilfelle hvor ligningen $F(x, y) = 0$ har formen $y^2 = f(x)$ hvor $f(x)$ er et polynom i x av $n$te grad. Det var som nevnt kjent gjennom Eulers addisjonsteorem at hvis $n = 3$ eller 4, så er slekten $\mu = 1$. Abel viste nu at hvis $n = 5$ eller 6 så er $\mu = 2$, for $n = 7$ eller 8 er $\mu = 3$ o. s. v.

I innledningen til denne avhandling som ble trykt i desember 1828, uttaler Abel også det generelle teorem og nevner at han i 1826 har innlevert en avhandling om dette til Akademiet i Paris. Avhandlingen av desember 1828 vakte straks stor oppsikt. Legendre gir i januar 1829 i et brev til Abel uttrykk for sin store begeistring uten å være oppmerksom på at dette spesialtilfelle (det hyperelliptiske) også var behandlet i Pariseravhandlingen som fremdeles lå ulest hos Cauchy. Og Jacobi skriver i mars 1829 til Legendre og spör hvordan i all verden en slik avhandling har kunnet bli oversett av Akademiet. Jacobis brev förte til at avhandlingen ble funnet frem igjen og det ble avgitt en hastverksuttalelse om den i juni 1829. (Abel var död i april). Derefter kom avhandlingen igjen på avveier, og den ble först trykt i 1841, hvorpå manuskriptet forsvant, — for alltid trodde man. (Angående nærmere enkeltheter henviser jeg til min avhandling [13].) Hösten 1952 hendte så det overraskende at Viggo Brun fant det aller meste av originalmanuskriptet til Pariseravhandlingen i et manuskriptbibliotek i Firenze [11], [12].

Men Abel vendte enda engang tilbake til sitt store teorem. Julen 1828 reiste han til Froland hovedgård for å tilbringe ferien sammen med sin forlovede som var guvernante der. Den 6. januar 1829, »et datum mera minnesvärdt i kulturens historia än konungars och kejsares och enskilda länders märkesdagar« (Mittag-Leffler [6]) skrev han en liten avhandling hvor han på snaue to sider gir beviset for den förste store hovedsats i Pariser-avhandlingen. Avhandlingen ble trykt hos Crelle en ukes tid för Abels död. Det er den siste avhandling Abel rakk å skrive.

*

Innenfor den problemgruppe 3 som foran er betegnet som integralenes omvendingsproblem gjorde Abel en oppdagelse som fikk en både vidtrekkende og dyptgående innflytelse på hele eftertidens matematiske utvikling, nemlig oppdagelsen av de elliptiske funksjoner.

Eulers addisjonsteorem for de elliptiske integraler er anfört foran. Euler var selv fullt oppmerksom på det spesialtilfelle som fremkommer ved å sette $k = 0$:

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$z = x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\,.$$

Hvis vi kaller det förste integral for u, det annet for v og det tredje for w, så får vi ved å anvende omvendingen på disse integraler:

$$x = \sin u,\ y = \sin v,\ z = \sin w$$

og addisjonsteoremet gir i dette tilfelle bare den bekjente sats at hvis

$$u+v = w$$

så er

$$\sin w = \sin u\sqrt{1-\sin^2 v}+\sin v\sqrt{1-\sin^2 u} = \sin u \cos v+\cos u \sin v.$$

Spesialtilfellet viser hvor enkel sammenhengen blir når vi her gjennomförer omvendingen og altså betrakter integralets övre grense som funksjon av integralets verdi istedenfor å betrakte integralets verdi som en funksjon av den övre grense.

Det er bemerkelsesverdig at hverken Euler eller hans nærmeste efterfölgere, av hvilke særlig må nevnes Legendre, forsökte å anvende den samme tankegang på de elliptiske integraler ($k \neq 0$).

Formentlig tilskyndet av Degens profetiske råd kastet Abel seg over studiet av de elliptiske integraler, særlig Legendres arbeider over samme. Senest i förste del av 1823 hadde han funnet frem til omvendingen som nettopp var den »maghellanske gjennemfart«, som Degen hadde forutsett uten å ane hvor den lå, og han styrte snart for full fart inn i det nyoppdagede analytiske ocean. »Mit dem Blicke des Genies erfasste dieser (Abel) sogleich im Beginne seiner wissenschaftlichen Laufbahn den Gedanken der Umkehrung des elliptischen Integrals, an dem Euler und Legendre, beide während der Arbeit eines Menschenalters, vorübergegangen waren. Er stellte sich die Aufgabe, nachdem man doch die Analogie dieses Integrals mit dem Arcussinus immer wieder betont hatte, endlich auch das Analogon des Sinus zu schaffen.« (Krazer [15]). Han fant at når det elliptiske integrals övre grense betraktes som en funksjon av integralets verdi, så kommer man frem til en funksjonsklasse med særdeles bemerkelsesverdige egenskaper. Mens omvending av integralene $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ og $\int_1^x \frac{dt}{t}$ förer til enkeltperiodiske hele transcendente funksjoner, så er de omvendte funksjoner av de elliptiske integraler dobbeltperiodiske funksjoner, men de er ikke hele funksjoner, idet de i hvert periodeparallellogram har poler (hvor funksjonsverdien blir uendelig). Disse elliptiske funksjoner som eftertiden har kalt dem, er dobbeltperiodiske, meromorfe funksjoner.

Allerede för utenlandsreisen har Abel funnet de elliptiske funksjoners fundamentalegenskap, den dobbelte periodisitet. Under oppholdet i utlandet gjorde han en rekke nye oppdagelser om de elliptiske funksjoner (jfr. Abels brever i [2]). I Paris har han höyst sannsynlig studert Cauchys berömte avhandling av 1825 om integrasjonsveier i de komplekse talls plan, og han har herved lært meget som kom ham til nytte for de elliptiske funksjoners teori, selvom hverken Abel eller hans nærmeste efterfölgere våget å legge Cauchys nye teori til grunn for sin fremstilling.

I september 1827 utkom förste del av Abels avhandling »Recherches sur les fonctions elliptiques« i Crelles Journal. Det var en stor avhandling, den förste del opptar 90 sider i Abels samlede verker [1], og avslutningen som ble trykt i mai 1828, 26 sider. »Es ist dies die grosse Fundamentalpublikation, mit der für das mathematische Publikum, da Gauss ja seine Resultate zurückgehalten hatte, die Theorie der elliptischen Funktionen — in Gegensatz zu Legendres Theorie der elliptischen Integrale — beginnt« (Klein [8]). Abel meddeler straks i begynnelsen at avhandlingen skal behandle de omvendte funksjoner. Han utvikler addisjonsteoremene for disse og beviser ved hjelp herav den dobbelte periodisitet. Han bestemmer så funksjonenes nullpunkter og poler. Derpå behandler han det såkalte multiplikasjonsproblem, idet han viser at hvis $x = \varphi(\alpha)$ er en elliptisk funksjon av α (x er integralets övre grense, α integralets verdi), så kan $\varphi(m\alpha)$ uttrykkes rasjonalt ved $\varphi(\alpha)$ og to elliptiske hjelpefunksjoner (m helt rasjonalt tall). Så behandles divisjonsproblemet som består i å bestemme $\varphi(\alpha)$ ved hjelp av $\varphi(m\alpha)$. Dette problem förer til meget interessante algebraiske resultater, idet Abel her finner klasser av algebraisk löselige ligninger av $n$te grad. Ut fra sin forkjærlighet for ligningsteorien erklærer Abel at denne side av undersökelsene har hans særlige interesse. I tilknytning til disse algebraiske undersökelser meddeler han sin berömte sats om lemniskatens deling, en fullstendig analogi til Gauss' resultater for cirkelen. Endelig fölger utviklingen av de elliptiske funksjoner i uendelige produkter og rekker. I denne siste forbindelse innförer Abel de funksjoner som senere under navn av thetafunksjoner ble gjort til gjenstand for inngående undersökelser av Jacobi, og som med andre betegnelser og i en noe annen form av ham ble brukt som grunnvoll for teorien.

Allerede i förste del var det lagt et fullstendig grunnlag for hele den senere utvikling av de elliptiske funksjoner, selv om den såkalte transformasjonsteori for de elliptiske integraler (hvorom senere) först kom i annen del. Det er også her den dobbelte periodisitet som gir nökkelen. I annen del behandler Abel også den såkalte komplekse multiplikasjon (jfr. [17] og [18]). Det er nevnt foran at $\varphi(m\alpha)$ kan uttrykkes rasjonalt ved $\varphi(\alpha)$ hvis m er hel rasjonal. Abel viste at det også finnes hele komplekse tall k slik at $\varphi(k\alpha)$ kan uttrykkes rasjonalt ved $\varphi(\alpha)$ og at k i så fall må tilhöre hva vi idag kaller et kvadratisk-imaginært tallegeme. Abels oppdagelser i forbindelse med denne komplekse multiplikasjon har fört til vesentlige resultater i algebra og tallteori, og spesialister på disse felter betegner disse oppdagelser som höydepunktet i hans produksjon (jfr. Fueter [19]).

De elliptiske funksjoner og de mangfoldige teorier som — på de forskjelligste områder av matematikken — tok sitt utspring fra denne kilde, har hatt en enorm betydning for hele det 19. århundredes matematiske utvikling. Virkningene har vært meget store i funksjonsteori, algebra, tallteori, gruppeteori og analytisk geometri, og de elliptiske funksjoner har også funnet fruktbare anvendelser i mekanikken og i andre grener av den anvendte matematikk. Det er meget forståelig at den tyske matematiker Richelot for over hundrede år siden betegnet de oppgaver som de elliptiske funksjoner stillet den matematiske videnskap overfor, som »die Aufgaben welche diesem Jahrhundert zur Lösung anheimfielen«. Som et eksempel på vår egen samtids dom kan nevnes Bells uttalelse ([9] s. 395): »Abel revolutionized the subject, and at the same time opened the floodgates of nineteenth-century analysis, in 1827....«.

Foruten fundamentalpublikasjonen »Recherches...« fikk Abel skrevet enda syv större eller mindre avhandlinger om de elliptiske funksjoner. De seks ble offentliggjort för hans död, den syvende var den för omtalte, ufullförte »Précis...«. Denne overordentlige arbeidsinnsats hadde imidlertid også en ytre foranledning, nemlig den såkaldte kappestrid mellom Abel og Jacobi. Denne kappestrid, »der für jeden Mathematiker ein unvergleichliches Interesse bietet« (Klein [8]), betegner en dramatisk og ofte omtalt episode i matematikkens historie. Men til tross for den citerte uttalelse av Klein er det neppe mange som har studert kappestridens forlöp i detaljer.

Carl Gustav Jacob Jacobi var födt 10. desember 1804, og han var altså to år yngre enn Abel. Han var fra 1826 privatdosent ved universitetet i Königsberg og ble i januar 1828 professor der. Han var medarbeider i Crelles Journal fra sommeren 1826. Han offentliggjorde fra hösten 1827 til våren 1829 en rekke korte avhandlinger om elliptiske integraler og elliptiske funksjoner. For det meste ble det i disse arbeider bare fremsatt satser uten bevis. Bevisene kom i Jacobis berömte lærebok »Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum« som ble ferdigtrykt i mai 1829, og som i mange år var den mest benyttede lærebok i dette emne ved Europas universiteter. Jacobi döde i 1851. Han var en av sin tids toneangivende matematikere, og han gjorde en fremragende innsats på mange forskjellige områder av matematikken.

Det oppstod efterhvert den tradisjon at Abel og Jacobi hver for seg og uavhengig av hverandre hadde oppdaget de elliptiske funksjoner og alle deres viktigste egenskaper, og at deres arbeider i 1827—29 i stadig vekselvirkning hadde skapt den nye teori, idet de gjensidig hadde kunnet stötte seg på hverandres arbeider. Denne oppfatning av kappestridens forlöp har dog tydeligvis hatt sine motstandere, for da Jacobis elev Borchardt i 1875 offentliggjorde en meget interessant brevveksling mellom Jacobi og Legendre i Crelles Journal protesterte han i en innledning heftig mot »une grave erreur historique« som holdt på å spre seg, idet det var blitt hevdet at det var Abel alene som hadde oppdagerretten. Borchardt finner derfor grunn til å gjenta påstanden om de to konkurrenters uavhengighet og jevnbyrdighet. En av dem som ikke var enig i dette var Mittag-Leffler (jfr. [6], [7]), og han skrev i den anledning til C. A. Bjerknes, som i förste omgang var enig med Borchardt, men som efter mere inngående studier kom til det resultat at den tradisjonelle oppfatning gjorde Abel stor urett. Bjerknes behandler kappestriden inngående i sin Abelbiografi [3], og han går her lenger enn Mittag-Leffler, idet han beskylder Jacobi for å ha benyttet seg av resultatene i förste del av Abels »Recherches« uten å medgi dette faktum. Beskyldningen ble gjentatt i den franske utgave av Bjerknes' bok [4], som fremkalte indignerte protester, spesielt fra tysk og fransk hold. Det ble bebudet at det skulle komme inngående imötegåelser av Bjerknes' fremstilling av kappestriden mellom Abel og Jacobi. Det er ikke blitt stort av disse imötegåelser, til tross for at de fleste matematikere har kviet seg ved å godta Bjerknes' påstand for så vidt sakens moralske side angår.

Förste del av Abels »Recherches« (jfr. foran) utkom 20. sept. 1827. Praktisk talt samtidig kom et hefte av »Astronomische Nachrichten« (redigert av Schumacher) som inneholdt to brever (til S.), datert 13. juni og 2. august 1827, fra Jacobi, og hvor denne uten bevis fremsetter en vidtgående sats om de elliptiske integralers transformasjon. Denne transformasjonsteori går ut på ved en rasjonal variabelsubstitusjon $y = f(x)$ å transformere et elliptisk integral til et annet av nöyaktig samme form, men med en annen verdi av den såkalte modul k (se formlene i Eulers addisjonsteorem foran). En slik transformasjon (fremsatt av engelsmannen Landen) var kjent allerede fra 1775. Den ble gjerne fremstillet i trigonometrisk form, men den svarer, som Jacobi har gjort oppmerksom på, til en rasjonal transformasjon av 2. grad. Legendre interesserte seg sterkt for transformasjonsteorien, særlig fordi den kom til nytte ved den numeriske beregning av elliptiske integraler, og Legendre hadde nylig til sin store glede funnet en ny rasjonal tranformasjon av 3. grad, men dette siste funn kjente Jacobi ikke til, da han sendte sine brever til »Astronomische Nachrichten«. Han uttaler her den viktige sats at det finnes rasjonale substitusjoner av en hvilketsomhelst heltallig grad n, ved hvilke et elliptisk integral overföres til et annet av samme form. Den 5. aug. 1827 skriver Jacobi et brev til Legendre, hvor han meddeler både den nevnte sats og en annen sats av lignende art (det såkaldte komplementære teorem) og viser hvorledes de nye satser kan nyttiggjöres til numeriske beregninger. Brevene til Schumacher og Legendre beveger seg helt i den eldre teoris tankebaner, idet de bare taler om elliptiske integraler og ikke inneholder noe som helst om det vi kaller elliptiske funksjoner, d. v. s. de omvendte funksjoner av integralene.

Legendre ble henrykt over Jacobis resultater, ikke minst fordi de falt helt innenfor rammen av Legendres egen teori og ikke betegnet noe brudd med Legendres egen tankegang. Han fremla dem i Académie des Sciences i november 1827 og ledsaget dem med de sterkeste lovord, som også fant veien til dagspressen, og som med et slag gjorde Jacobi så berömt som en matematiker kan bli i denne verden.

I september forelå altså de nevnte to samtidige publikasjoner. Dermed begynner kappestriden mellom Abel og Jacobi, — eller rettere sagt, dermed er den i virkeligheten avgjort.

Efter Jacobis brev av 12. april 1828 til Legendre er det på det rene at han da han 5. aug. 1827 skrev sitt brev til Legendre, ikke hadde funnet noe bevis for sine transformasjonssetninger. Han vendte seg nu först til andre emner og skrev i august tre avhandlinger som ikke hadde noe med elliptiske funksjoner å gjöre.

Schumacher var ikke begeistret over nakne satser uten bevis, og 5. november skriver han til Jacobi med en inntrengende anmodning om å sende beviset. Jacobi daterer så 18. november 1827 en avhandling som bringer beviset, og som kom i »Astronomische Nachrichten« i januar 1828. Her innförer nu også Jacobi den omvendte funksjon av det elliptiske integral. Han bruker andre betegnelser enn Abel, idet han betegner den omvendte funksjon med sinam u, en betegnelse som ble dominerende helt til slutten av århundredet. Forövrig legger han ikke særlig vekt på de omvendte funksjoner. De annonseres med ordene: »Notatione nova simplicioreque abhinc utar«. (Jeg vil herefter benytte en ny, enklere betegnelse). Han viser at sinam u er enkeltperiodisk, men den dobbelte periodisitet, som særlig karakteriserer de elliptiske funksjoner i motsetning til de trigonometriske, forekommer ikke. Det finnes ingen henvisning til Abels arbeide.

Det er særlig i det begivenhetsforlöp som her er skildret at Bjerknes fant grunnlag for sin beskyldning mot Jacobi. Han fant det utenkelig at ikke Jacobi skulle ha sett Recherches i god tid för 18. november. Det hefte av Crelles Journal hvor Recherches stod, inneholdt nemlig også en avhandling av Jacobi, som dessuten hadde flere andre avhandlinger liggende til trykning hos Crelle, og som derfor måtte være spent på hvert nytt hefte. Da Jacobi på denne tid strevet med å finne beviset for sine transformasjonssetninger, måtte han være meget interessert i enhver ny avhandling om elliptiske integraler og funksjoner, mente Bjerknes. Bjerknes visste ikke når Recherches kom til Königsberg, men han antok at vedkommende hefte måtte ha kommit dit senest en måned för Jacobi

18. november daterte sitt bevis. Ved en pussig tilfeldighet vet vi nu at Recherches er kommet til Königsberg adskillig för Bjerknes antok. I sin Jacobi-biografi [20] meddeler Koenigsberger nemlig at universitetsbiblioteket i Königsberg i et brev av 4. oktober 1827 klager til Crelles Journal over at det siste hefte er sendt med posten, hvilket har påfört biblioteket en portoutgift på en Thaler, og dette ansees overflödig, »da gar keine Eile nötig ist«. Koenigsberger tilföyer i direkte forbindelse hermed: »Zunächst ging dieses Heft aber an Bessel, der erst nach einiger Zeit Jacobi davon Mitteilung macht: »Es ist ein neues Heft des Crelleschen Journals angekommen (B. 2, H. 2) mit einer Abhandlung über elliptische Transcendenten von Abel. Sie werden mir am besten sagen können, ob der Gesichtspunkt unter welchem er sie ansieht, interessant ist.« Denne Bessels meddelelse er iallfall interessant. For det förste viser ordene »erst nach einiger Zeit« at Koenigsberger har visst *når* Jacobi fikk meddelelsen. Da Koenigsberger hevder Jacobis uavhengighet av Abel, ville han sikkert ha oppgitt tidspunktet hvis det hadde ligget meget nær för 18. november eller efter denne datum. Jacobi har derfor formentlig fått meldingen i god tid för. For det annet er den siste setningen om »der Gesichtspunkt unter welchem er sie ansieht« av betydelig interesse. Det er ikke godt å forstå at det her kan siktes til annet enn »omvendingen«. Det var jo den som betegner det nye synspunkt i Recherches. Nu fremhever Koenigsberger gang på gang det nære, daglige personlige samarbeide mellom Jacobi og Bessel, han taler bl. a. om »der über den Gang der Untersuchungen Jacobis genau unterrichtete Bessel«. Det er vel da ikke for dristig å slutte av den citerte meddelelse fra Bessel til Jacobi at hvis Jacobi på det tidspunkt skulle ha gjennomfört omvendingen og oppdaget en klasse dobbeltperiodiske funksjoner, så har han iallfall ikke nevnt noe om det til Bessel, hvilket er påfallende. Bessel hadde f. eks. fått skriftlig meddelelse om Jacobis transformasjonssetning, för den ble sendt til Schumacher. Koenigsberger påstår ikke at Jacobi ikke i forbindelse med Bessels meddelelse har sett Recherches, men tilföyer mere forsiktig: »Zu einem wirklichen Studium der recherches wird Jacobi nach allem was wir wissen wohl kaum vor Ende des Jahres gekommen sein.«

Den siste antagelse er neppe riktig. Det foreligger nemlig et brev av 12. januar 1828 fra Jacobi til Legendre, og brevet viser at han på det tidspunkt har gjennomarbeidet hele den utkomne del av Recherches meget grundig og at han har omskrevet Abels resultater til sin egen betegnelsesmåte. Den största del av brevet består i et referat av Recherches. Han nevner blant meget annet Abels funn av den dobbelte periodisitet uten med et ord å antyde at Jacobi på sin side hadde innfört de omvendte funksjoner og funnet periodisiteten. Jacobis avhandling av 18. november, hvor han selv innförer de omvendte funksjoner, var på det tidspunkt ennu ikke utsendt. Han bebuder denne avhandling i brevet til Legendre uten å gi noen detaljer om dens innhold og uten å hevde at det bevis som der er gitt, er funnet uten kjennskap til Recherches. Det er i det hele tatt en besynderlig motstrid mellom brevet av 12. januar 1828 og enkelte senere uttalelser av Jacobi. Det er riktignok först flere år senere (i 1832) at Jacobi uttrykkelig sier at også han har funnet den dobbelte periodisitet. Han sier det ikke i sine arbeider fra årene 1827–29, og i det nettopp nevnte brev tillegger han altså uten reservasjoner Abel æren for denne oppdagelse.

Da Legendre kort efter mottok Jacobis avhandling av 18. november 1827 oppdaget han at beviset for det såkalte komplementære teorem ennu manglet. Efter en tid purret han Jacobi efter dette bevis. Dette Legendres brev kryssedes med et brev av 12. april 1828 fra Jacobi, som der leverer beviset for det komplementære teorem ved hjelp av Abels formler fra Recherches. (»Pour démontrer ceci, il faut remonter aux formules analytiques concernant la multiplication, données la première fois par M. Abel«).

Dette står altså i et privatbrev. I Jacobis offentliggjorte arbeider gis ingen direkte henvisning til Abel for dette bevis' vedkommende. I mellomtiden (juni 1828) hadde Legendre funnet et bevis som ikke bygget på de nevnte abelske formler. Legendre hadde lenge meget vanskelig for å sette seg inn i og for å forsone seg med Abels tankegang, som bygget helt på de omvendte funksjoner, og som derfor fjernet seg meget sterkt fra Legendres egen.

I Jacobis brev av 12. april finner man videre hans konfidensielle (»Ce n'est donc que pour vous, Monsieur, que j'ajoute le suivant«) erklæring om det heuristiske resonnement som förte ham til de satser som han i august 1827 meddelte Schumacher og Legendre. Også her er det uklarheter for så vidt som han sier at han för 5. august har funnet en ligning som han i brevet av 12. januar 1828 hadde betegnet som »théorème fondamental de M. Abel«. Uoverensstemmelsen forklares kanskje lettest ved å anta med Bjerknes at det dreier seg om det samme resultat skrevet på to helt forskjellige måter, först med direkte, men efter Recherches med »omvendte« betegnelser. I så fall gir uttalelsen ingen opplysning om når Jacobi innförte omvendingen. At bevisene först er funnet senere sies uttrykkelig, men ikke når de ble funnet.

Abel hadde i begynnelsen av februar 1828 fullfört annen del av Recherches, som inneholdt en fullstendig teori for de elliptiske integralers transformasjon med alle beviser gjennomfört på grunnlag av de omvendte funksjoner og deres dobbelte periodisitet. För avsendelsen til Crelle (12. febr. 1828) ble han oppmerksom på Jacobis transformasjonssats fra september 1827. Den gjorde ikke större inntrykk på ham, og han nöyet seg med å föye til en efterskrift, hvor han peker på at Jacobis sats er inneholdt som spesialtilfelle i en av hans egne formler i den nettopp fullförte avhandling, hvorpå han gjennomförer beviset i detalj også i den spesielle form som Jacobi uten bevis hadde gitt denne sats. Annen del av Recherches med denne tilföyelse ble som nevnt trykt i mai 1828.

Et ganske annet inntrykk gjorde Jacobis för nevnte avhandling av 18. november 1827, som ikke kom Abel i hende för i april. Postgangen til Norge om vinteren var i de tider meget langsom. Det har tydeligvis berört Abel sterkt at denne Jacobis avhandling innförer omvendingstanken uten å nevne Recherches som dog hadde foreligget for offentligheten to måneder för Jacobis avhandling ble avsendt og 3—4 måneder för den ble trykt. Abel reiste imidlertid ingen prioritetsstrid. Han nöyet seg med å skrive en stor avhandling hvor han betraktet hele transformasjonsteorien fra et langt mere generelt og höytliggende synspunkt enn Jacobi hadde anlagt, og denne avhandling (datert 27. mai 1828) sendte han til »Astronomische Nachrichten« hvor den utkom i juni eller juli 1828. Abel ytret aldri et nedsettende ord om Jacobi, men at han har tenkt sitt kan man se av at han i et brev til Holmboe betegner avhandlingen som »min dödelse af Jacobi«. Dödelse er et selvlaget jargonuttrykk, »was im Memorial [2] mit »exécution«, von Bjerknes [4] mit »mortification« übersetzt wird, und wofür wir im Deutschen wohl »Abschlachtung« sagen würden« (Krazer [15], note 27). Denne avhandling ble fra alle sider betegnet som et virkelig mesterverk, og Jacobi skriver om den i et brev til Legendre: »Elle est au-dessus de mes éloges comme elle est au-dessus de mes propres travaux«. Abel skrev som nevnt enda en rekke viktige arbeider om de elliptiske funksjoner. Det er betegnende at han i disse arbeider tar for seg og beviser setninger som Jacobi efterhvert fremsetter uten bevis i sine korte notiser i Crelles Journal i 1828.

For en som i dag studerer kappestridens forlöp er det nærmest ubegripelig at det noensinne har vært tale om jevnbyrdighet mellom Abel og Jacobi når det gjelder oppdagelsen av de elliptiske funksjoner og oppbygningen av deres teori. En slik jevnbyrdighet påståes da heller ikke lenger fra tysk side (jfr. Krazer [15] og især Faber [23] i hvilket siste verk det gis et ganske kort og efter min mening uklanderlig historisk resumé av Abels og Jacobis innsats).

Om Bjerknes' angrep på Jacobis moral vil det vel alltid være delte meninger. Mange vil vel foretrekke Mittag-Lefflers forklaring ([6], [7]) som går ut på at Jacobi tenkte om Abels tanker og omsatte dem til sitt eget formelsprog, som avvek adskillig fra Abels, og da kjente han dem ikke lenger igjen, men trodde at de var hans egne. Det er mulig man kunne komme spörsmålet nærmere, hvis man kunne få adgang til hele korrespondansen mellom Jacobi og Bessel og mellom Jacobi og Crelle. Men en ting kan det neppe være delte meninger om, og det er at den måten på hvilken Jacobi citerer — eller rettere sagt ikke citerer — Abel, den er iallfall höyst utilfredsstillende for å bruke et meget mildt uttrykk. Det er nevnt foran at Jacobi i den private korrespondanse med Legendre gir Abel stor honnör. Men billedet er et annet når man kommer til Jacobis offentliggjorte arbeider. Der er omtalen av Abels arbeider overordentlig sparsom på det felt det her gjelder. Et særlig drastisk eksempel er en avhandling datert 21. juli 1828 og trykt i Crelles Journal om hösten. Jacobi meddeler her — som vanlig uten bevis — en del resultater vedrörende de elliptiske funksjoner. Denne avhandling er den förste hvori Jacobi direkte omtaler de elliptiske funksjoners dobbelte periodisitet, og han understreker her ganske sterkt betydningen av denne fundamentalegenskap. Abel og hans arbeider nevnes overhodet ikke i avhandlingen. På det tidspunkt har Jacobi bevislig studert både förste og annen del av Recherches meget nöye og antagelig også »Solution d'un problème général. . . . .« (Dödelsen). Det er da helt utillatelig å unnlate å nevne den mann som hadde skapt hele teorien for de dobbeltperiodiske funksjoner og som så klart hadde vist hvilket overordentlig effektivt forskningsmiddel nettopp den dobbelte periodisitet er. Hvis Jacobi ville hevde at han uavhengig av Abel hadde funnet den dobbelte periodisitet, så burde han iallfall ha sagt det her.

Særlig uheldig er det at Abel er så helt utilstrekkelig citert også i »Fundamenta nova«, for efterat denne samlede læreboksfremstilling var utkommet var det naturlig nok forholdsvis få som sökte til Abels og Jacobis originalavhandlinger. I et brev av januar 1829 til Legendre lover Jacobi at han i förste del av Fundamenta nova skal gjöre rede for hva som spesielt tilhörer Abel. Dette löfte ble ikke holdt. Riktignok begynner Fundamenta nova med en hyldest til Abel, hvor det sies at Abel på en beundringsverdig måte har gjennomfört en undersökelse av de elliptiske integralers addisjon og multiplikasjon. I ordene »nostra laude majore« (som her tar sikte på förste del av Recherches) gjenlyder ordene »elle est audessus de mes éloges«, men det tales i denne forbindelse ikke om de omvendte funksjoner, og henvisningen gir ikke noesomhelst inntrykk av hva Abel har utrettet. Henvisningen er i det hele tatt meget uklar og gjelder bare förste del av Recherches, ingen av Abels andre fundamentale arbeider nevnes med et ord i hele verket. Senere nevnes Abel en eneste gang til, helt en passant, i forbindelse med multiplikasjonen. Men Abel nevnes overhodet ikke i forbindelse med innförelsen av de omvendte funksjoner eller ved den dobbelte periodisitet eller ved transformasjonen eller ved utviklingen i uendelige produkter og rekker o. s. v., og denne iöynefallende mangel kompenseres ikke ved en hyldest i alminnelige vendinger i bokens förste linjer.

Abel hadde mange skuffelser i sitt liv. Det er nesten en tilfredsstillelse å tenke på at han ble spart for å se Fundamenta nova som först utkom efter Abels död. Hadde han vært i sin fulle kraft kunne han nok ha hevdet sine rettigheter. Men hvis han hadde fått se Fundamenta nova på sitt dödsleie måtte det ha blitt ham en bitter skuffelse.

*

Abel gjorde en vesentlig innsats på ennu et viktig område av matematikken, nemlig læren om uendelige rekker. Han står her ved siden av Cauchy som en av grunnleggerne av den moderne rekketeori, som han beriket med nye satser, og han er samtidig en av de fremste representanter for den rensende kritikk, som i begynnelsen av det 19. århundrede gjorde seg gjeldende overfor de synsmåter som på dette felt hadde preget de fleste av det 18. århundredes matematikere.

I tiden för sin utenlandsreise hadde Abel selv behandlet uendelige rekker med adskillig lettsindighet. Han hadde bl. a. ivrig studert Euler og denne store læremester oppfordret som bekjent ikke til synderlig forsiktighet i omgangen med rekker. Abel har formentlig alt för sin reise hatt sine tvil om holdbarheten av de eldre matematikeres slutninger, for allerede i den förste tid i utlandet kommer hans kritikk på dette felt i full virksomhet, bl. a. under innflytelsen av Cauchys »Analyse Algébrique« fra 1821, en bok som han tydeligvis har fått tak i kort efter ankomsten til Berlin. Men også i dette utmerkede verk fant han en feil på et ikke uvesentlig punkt.

Abel skriver i et brev til Holmboe av 16. januar 1826: »Divergente Rækker er i det Hele noget Fandenskab, og det er en Skam at man vover at grunde nogen Demonstration derpaa. Man kan faae frem hvad man vil naar man bruger dem, og det er dem som har gjort saa megen Ulykke og saa mange Paradoxer .... Jeg har i det hele faaet Öjnene op paa en meget forbausende Maneer; thi naar man undtager de allersimpleste Tilfælde for Ex: de geometriske Rækker, saa gives der i hele Mathematiken næsten ikke en eneste Række, hvis Sum er bestemt paa en stræng Maade.« I et brev til Hansteen av 29. mars 1826 hevder han et lignende synspunkt (jfr. [2]).

I 1826 skrev han så sin store avhandling om binomialrekken, som ble trykt i Crelles Journal. Om denne avhandling skriver Knopp i sin bekjente lærebok »Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen« (Berlin 1922): »Die Entdeckung der Binomialreihe durch Newton bildet einen der grossen Marksteine in der Entwicklung der mathematischen Wissenschaften .... Später hat Abel diese Reihe erneut zum Gegenstand von Untersuchungen gemacht, die einen wohl gleich wichtigen Markstein in der Entwicklung der Reihentheorie bilden.«

Euler var den förste som ga en gjennomfört behandling av binomialrekken for reell variabel og en hvilkensomhelst reell eksponent. Cauchy utvidet undersökelsene til kompleks variabel. Abel tok i sin avhandling skrittet fullt ut, idet han lot både den variable og eksponenten være hvilkesomhelst komplekse tall. Han löste konvergensspörsmålene fullstendig, idet han også undersökte forholdene på konvergenscirkelen og klarla i hvilke punkter på konvergenscirkelen rekken er divergent eller konvergent og bestemte rekkens sum i de punkter på konvergenscirkelen hvor rekken konvergerer.

I en innledning til avhandlingen beviser Abel seks alminnelige setninger om uendelige rekker. Innholdet av disse meget vesentlige setninger finnes idag i alle större læreböker om rekker. Her fremla han bl. a. den Abelske partielle summasjon som har vist seg å være et så nyttig verktöy. Videre den Abelske grenseverdisats (også kalt den Abelske kontinuitetssats) som sier at hvis en potensrekke konvergerer i et punkt (også om vedkommende punkt ligger på konvergenscirkelen), så vil rekkens sum ved radial tilnærming til nevnte punkt kontinuerlig nærme seg rekkesummen i punktet. Kontinuiteten strekker seg altså i tilfelle helt ut til konvergenscirkelen. Beviset beror i virkeligheten på at rekken er uniformt konvergent i det lukkede intervall som avsluttes i vedkommende konvergenspunkt. Begrepet uniform konvergens ble först definert og klarlagt lenge efter Abels död, men han var også her en vesentlig forlöper. Videre finnes i den nevnte innledning den tidligere ikke beviste sats at selv om to rekker bare konvergerer betinget, så vil den rekke som dannes av dem ved den alminnelige produktregel, såfremt den konvergerer, ha en sum som er lik produktet av de to förste rekkers summer. Beviset er en enkel og elegant anvendelse av grenseverdisatsen.

Abel fikk bare offentliggjort en eneste liten avhandling til som handlet spesielt om uendelige rekker. Det er »Note sur un mémoire de M. Olivier .....«, som ble trykt i Crelles Journal i begynnelsen av 1828. Avhandlingen som er på bare tre sider er et fullendt lite mesterverk, og den er dessuten meget lettlest. Noten til Olivier egner seg godt som avslutning på denne oversikt over Abels arbeider. Den gir så å si Abel i et nötteskall, idet den også leverer en frapperende illustrasjon til en hyppig citert, prinsipiell programerklæring av Abel. Programerklæringen finnes i det efterlatte arbeide »Sur la résolution algébrique des équations« og lyder så:

» En effet on se proposait de résoudre les équations, sans savoir si cela était possible. Dans ce cas, on pourrait bien parvenir à la résolution, quoique cela ne fût nullement certain; mais si par malheur la résolution était impossible, on aurait pu la chercher une éternité, sans la trouver. Pour parvenir infailliblement à quelque chose dans cette matière, il faut donc prendre une autre route. On doit donner au problème une forme telle qu'il soit toujours possible de le résoudre, ce qu'on peut toujours faire d'un problème quelconque. Au lieu de demander une relation dont on ne sait pas si elle existe ou non, il faut demander si une telle relation est en effet possible. Par exemple, dans le calcul intégral, au lieu de chercher, à l'aide d'une espèce de tâtonnement et de divination, d'intégrer les formules différentielles, il faut plutôt chercher s'il est possible de les intégrer de telle ou telle manière. En présentant un problème de cette manière, l'énoncé même contient le germe de la solution, et montre la route qu'il faut prendre; et je crois qu'il y aura peu de cas où l'on ne parvient à des propositions plus ou moins importantes, dans le cas même où l'on ne saurait répondre complètement à la question à cause de la complication des calculs. Ce qui a fait que cette méthode, qui est sans contredit la seule scientifique, parce qu'elle est la seule dont on sait d'avance qu'elle peut conduire au but proposé, a été peu usitée dans les mathématiques, c'est *l'extrême complication* à laquelle elle paraît être assujettie dans la plupart des problèmes, surtout lorsqu'ils ont une certaine généralité; mais dans beaucoup de cas cette complication n'est qu'apparente et s'évanouira dès le premier abord. J'ai traité plusieurs branches de l'analyse de cette manière, et quoique je me sois souvent proposé des problèmes qui ont surpassé mes forces, je suis néanmoins parvenu à un grand nombre de résultats généraux qui jettent un grand jour sur la nature des quantités dont la connaissance est l'objet des mathématiques. «

Olivier hadde skrevet en avhandling i Crelles Journal hvor han påstod at hvis i en rekke med reelle, positive ledd $a_0, a_1, \ldots, a_n \ldots$, $na_n \to 0$ når $n \to \infty$, så er rekken konvergent, og hvis $na_n \to A > 0$, så er rekken divergent. Det siste er riktig, men den förste del av satsen motbeviste Abel idet han ved en enkel regning viste at rekken $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ er divergent. Det var ingen tilfeldighet at Abel valgte dette eksempel. I et efterlatt arbeide »Sur les séries« som dessverre först ble offentliggjort i 2. utgave av hans verker (1881), men som er skrevet i 1827, beviser han de bekjente logaritmiske konvergenskriterier som sier at rekken

$$\sum \frac{1}{n \cdot \log n \cdot \operatorname{loglog} n \cdot \ldots \cdot (\log_m n)^{1+\alpha}}$$

er konvergent hvis $\alpha > 0$, men divergent hvis $\alpha = 0$ (senere gjenoppdaget av flere, bl. a. av Bertrand).

Det ville ikke være særlig grunn til å dvele ved Abels note til Olivier, hvis han der bare hadde nöyet seg med å arrestere en feilaktig påstand. Men nu kommer tankegangen fra den ovenfor nevnte programerklæring frem, idet Abel stiller spörsmålet: Er det overhodet mulig å finne en funksjon $\varphi(n)$ som er slik at hvis $\varphi(n)a_n \to 0$ når $n \to \infty$ så konvergerer rekken, og hvis $\varphi(n)a_n \to A > 0$ så divergerer den? Det er et problem som unektelig synes ganske krevende, men Abel löser det med lekende letthet. Han beviser först fölgende hjelpesetning:

Hvis rekken $a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ er divergent, så er også rekken

$$\frac{a_1}{a_0}+\frac{a_2}{a_0+a_1}+\frac{a_3}{a_0+a_1+a_2}+\ldots+\frac{a_n}{a_0+a_1+\ldots+a_{n-1}}+\ldots$$

divergent. (Denne nyttige hjelpesetning utgjör en del av den setning som i moderne læreböker kalles Abel-Dinis sats. Resten av denne sats finnes i det vesentlige i »Sur les séries« og ble gjenoppdaget av Dini).

Derefter forutsetter Abel at det finnes en funksjon $\varphi(n)$ med de ovenfor nevnte egenskaper. I så fall må rekken $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ være divergent, for her er $\varphi(n)a_n = 1$. Videre må under samme forutsetning rekken

$$\sum \frac{\frac{1}{\varphi(n)}}{\frac{1}{\varphi(1)}+\frac{1}{\varphi(2)}+\ldots+\frac{1}{\varphi(n-1)}}$$

være konvergent, for her går $\varphi(n)a_n$ mot 0. Men efter den ovenfor angitte hjelpesetning er også den siste rekken divergent hvis $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ er divergent. Altså finnes det ikke noen slik funksjon $\varphi(n)$.

Dette resultat er det förste ledd i en lang rekke undersökelser ut igjennom hele det 19. århundrede, undersökelser som prövet å gi svar på spörsmålet: Er det mulig å finne noe *generelt* kriterium til å skille mellom konvergente og divergente rekker? Först henimot år 1900 var det helt klart at svaret er nei.

Det er vel begrunnet når Abels franske biograf Pesloüan [5] skriver om noten til Olivier: »Si l'on n'a point le temps de lire l'oeuvre d'Abel, du moins peut-on méditer sur ces quelques pages; il n'en est pas qui montrent mieux sa merveilleuse lucidité d'esprit et son admirable faculté d'invention.«

REFERENSER

[1] *Ouevres complètes de Niels Henrik Abel*, I–II. Christiania 1881.

[2] E. Holst, C. Størmer, L. Sylow: *Festskrift ved hundredeaarsjubilæet for N. H. Abels födsel*. Kristiania 1902.

[3] C. A. BJERKNES: *Niels Henrik Abel. En skildring af hans liv og videnskabelige virksomhed.* Stockholm 1880.
[4] C. A. BJERKNES: *Niels Henrik Abel. Tableau de sa vie et de son action scientifique. Traduction française. Revue et considérablement augmentée par l'auteur.* Paris 1885.
[5] CH. LUCAS DE PESLOÜAN: *N. H. Abel. Sa vie et son oeuvre.* Paris 1906.
[6] G. MITTAG-LEFFLER: *Niels Henrik Abel.* I »Ord och Bild« 1903.
[7] G. MITTAG-LEFFLER: *Niels Henrik Abel.* Paris 1907.
[8] F. KLEIN: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. I.* Berlin 1926.
[9] E. T. BELL: *The development of mathematics.* Second edition. New York. London. 1945.
[10] VIGGO BRUN: *Niels Henrik Abel.* Det kongelige norske videnskabers selskab. Forhandlinger. Trondheim 1952.
[11] VIGGO BRUN: *Abels »Pariseravhandling« og funnet i Firenze.* Aftenposten 11. febr. 1953. Oslo.
[12] VIGGO BRUN: *Abels »Pariseravhandling«.* Aftenposten. 30. mai 1953. Oslo.
[13] FR. LANGE-NIELSEN: *Zur Geschichte des Abelschen Theorems. Das Schicksal der Pariserabhandlung.* Norsk Matematisk Tidsskrift. 1927.
[14] FR. LANGE-NIELSEN: *Abel og Académie des Sciences i Paris.* Norsk Matematisk Tidsskrift. 1929.
[15] A. KRAZER: *Zur Geschichte des Umkehrproblems der Integrale.* Jahresb. d. D. M. V. 18, 1909.
[16] EMILE PICARD: *Traité d'Analyse.* II. Paris 1905.
[17] TH. SKOLEM: *Elliptiske Funktioners komplekse Multiplikation.* Norsk Matematisk Tidsskrift. 1926.
[18] C. STÖRMER: *Abels opdagelser.* Norsk Matematisk Tidsskrift. 1929.
[19] R. FUETER: *Vorlesungen über die singularen Moduln und die komplekse Multiplikation der elliptischen Funktionen.* Leipzig 1924 og 1927.
[20] LEO KOENIGSBERGER: *Carl Gustav Jacob Jacobi.* Leipzig 1904.
[21] LEO KOENIGSBERGER: *Zur Geschichte der Theorie der elliptischen Transcendenten in den Jahren 1826—29.* Leipzig 1879.
[22] S. GUNDELFINGER: *Über die Entdeckung der doppelten Periodicität und Jacobis Anteil daran.* Sitzungsberichte der königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1898.
[23] BURKHARDT-FABER: *Elliptische Funktionen,* Berlin und Leipzig 1920.
[24] VIGGO BRUN: *Det gjenfunne manuskript til Abels Parisavhandling.* Nord. Mat. Tidskr. 1953.